Lezione 16

martedì 19 aprile 2016
12:17

Serie di Potenze

DEF. Data una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di numeri complessi e $z_0 \in \mathbb{C}$, una serie di funzione del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \qquad z \in \mathbb{C}$$

si chiama serie di potenze centrata nel punto z_0.

Nel seguito: $z_0 = 0 \in \mathbb{C}$.

TEOR (Criterio di Cauchy - Hadamard)
Data la serie di pot. complessa

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

e definito $R \in [0, \infty]$ in questo modo

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Avvengono i seguenti fatti
i) La serie converge assolutamente ⤳

in ogni punto $z \in D_R = \{ z \in \mathbb{C} : |z| < R \}$

ii) Per ogni $0 < \delta < R$, la serie di potenze converge uniformemente su

$$A_\delta = \{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq \delta \}$$

iii) Se $z \in \mathbb{C}$ è tale che $|z| > R$, allora la serie NON converge nel p.to z.

Commento: Sulla circonferenza dove $|z| = R$ la serie può sia convergere che NON conv.

Il numero $R \in [0, \infty]$ si dice raggio di convergenza della serie.

Dim. (i) Tesi $|z| < R \overset{?}{\Longrightarrow}$ c'è Conv. Assoluta

Uso criterio Radice per la CA: nel punto. Studio

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot |z|^n$$

Calcolo

$$L(z) = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n| \, |z|^n}$$

$$= |z| \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

$$= |z| \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

$$= \frac{|z|}{R}$$

CR:

- $L(z) = \frac{|z|}{R} < 1 \Rightarrow$ Serie Conv.

$$\Updownarrow$$

$$|z| < R$$

- $L(z) = \frac{|z|}{R} > 1 \Rightarrow$ la Serie Non conv. Assolutamente e nemmeno semplice.

$|z| > R$

(ii) Fisso $0 < \delta < R$. Studio la CU su $A_\delta = \{ |z| \leq \delta \}$.

Uso il criterio di Weierstrass:

$$\sup_{z \in A_\delta} |a_n z^n| = \sup_{z \in A_\delta} |a_n| \cdot |z|^n \leq$$

$$\leq \delta^n \cdot |a_n|$$

Ma la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \delta^n |a_n| < \infty$$

converge

CR

$$L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\delta^n |a_n|} = \delta \frac{1}{R} < 1$$

perché $\delta < R$.

$\Downarrow$ Weierstrass

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ CU su A_δ

$\forall \delta < R$.

Cenni sulle funzioni olomorfe

Sia $A = \{ |z| < R \}$ il disco di

conv. della serie di

interrotto