Lezione 18

martedì 26 aprile 2016 12:26

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^\alpha + 1} z^n \qquad z \in \mathbb{C}$$

$\alpha \geq 0$

- $R = 1$ Ragg. conv.
- $|z| = R = 1$, $z = e^{i\theta}$ $\theta \in [0, 2\pi)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^\alpha + 1} e^{in\theta}$$

$e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n$

1° caso $\theta = 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^\alpha + 1}$$

Per il CCA la serie converge se e solo se conv. la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha - 1}} < \infty \iff \alpha - 1 > 1 \iff \alpha > 2$$

2° caso $\theta = \pi$ $e^{i\theta} = -1$

$(e^{i\theta})^n = (-1)^n$

Si trova

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \underbrace{\frac{n}{n^\alpha + 1}}_{= a_n}$$

Uso Leibniz:

$$a_n = \frac{n}{n^\alpha + 1}$$

- $\lim_{n \to \infty} \frac{n}{n^\alpha + 1} = 0 \iff \alpha > 1$

Per $\alpha \leq 1$ la serie NON converge

- Controllo se $n \longmapsto \frac{n}{n^\alpha + 1}$ è decrescente per $\alpha > 1$.

- Controllo se $n \longmapsto \dfrac{\quad}{n^{\alpha}+1}$ è decrescente per $\alpha > 1$.

Considero la funzione

$$f(x) = \frac{x}{x^{\alpha}+1}$$

e controllo che $f'(x) \leq 0$ per tutte le x grandi. FARE i CONTI

Allora nel punto $z=-1$ la serie converge per $\alpha > 1$.

- Studio la conv. unif.

Per il crit. di C.-H. la serie converge unif. su

$$A_\delta = \{ z \in \mathbb{C} \,:\, |z| \leq \delta \}$$

$\forall\, 0 < \delta < 1$. (Vero $\forall \alpha$).

Esamino la CU sul disco $\{|z| \leq 1\}$

ORA se $\alpha \leq 2$ nel punto $z=1$ NON c'è conv. punt. Quindi non può esserci CU su $\{|z|<1\}$.

Rimane il caso $\alpha > 2$.

Provo con il CR. di W.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\sup_{|z|\leq 1} \frac{n}{n^{\alpha}+1} |z|^{n}}_{= a_n} =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^{\alpha}+1} < \infty \text{ se } \alpha > 2$$

Dunque

$$\alpha > 2 \overset{\text{CW.}}{\Longrightarrow} \text{Serie Conv. Unif su } \{|z| \leq 1\}.$$

$\square$

ESERCIZIO Sia $p \geq 0$ un parametro fissato

[illegible]

ESERCIZIO Sia $p \geq 0$ un parametro fissato.
Per $x \geq 0$ si consideri la serie di f.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^p x^{p+1} e^{-nx}, \quad x \geq 0.$$

① Discutere la conv. Punt.

② Studiare la conv. totale e uniforme della serie

③ Provare che
$$f(x) \geq \int_1^{\infty} (t-1)^p x^{p+1} e^{-tx} \, dt$$
$x \geq 0$

④ Provare che f non è cont. nel punto $x = 0$.

Def $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ conv. tot. su A

se $\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in A} |f_n(x)| < \infty$

converge.

Soluzione

① Conv. Punt.
Quando $x = 0$ trovo
$$f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$$

Poi quando $x > 0$: (ho serie a termini positivi)

Criterio Radice
$$\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{n^p x^{p+1} e^{-nx}} =$$
$$= \lim_{n \to \infty} \underbrace{\sqrt[n]{n^p}}_{\downarrow} \, \underbrace{\sqrt[n]{x^{p+1}}}_{\downarrow} \, \sqrt[n]{(e^{-x})^n}$$
$$= e^{-x} \cdot 1 \cdot 1 < 1$$
si perché $x > 0$

Per il C. R. la serie conv. $\forall x > 0$.

② Devo studiare la convergenza
$$\sum^{\infty} \sup (n^p x^{p+1} e^{-nx})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \geq 0} \underbrace{n^p x^{p+1} e^{-nx}}_{f_n(x)}$$

Studio f_n.

Derivata

$$f_n'(x) = n^p \left((p+1) x^p e^{-nx} + x^{p+1} e^{-nx} (-n) \right)$$

$$= n^p e^{-nx} x^p \left((p+1) - nx \right)$$

$$f_n'(x) \geq 0 \iff p+1 - nx \geq 0$$

$$\iff (\text{c.s.})\ x \leq \frac{p+1}{n}$$ unico p.to di max assoluto

Conti

$$f_n\left(\frac{p+1}{n}\right) = n^p \left(\frac{p+1}{n}\right)^{p+1} e^{-n \frac{p+1}{n}}$$

$$= (p+1)^{p+1} e^{-(p+1)} \frac{1}{n}$$

Ma allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n\left(\frac{p+1}{n}\right) = (p+1)^{p+1} e^{-(p+1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$= +\infty \quad \text{diverge}$$

$\Rightarrow$ non c'è conv. tot. su $[0, \infty)$.

Fisso un $\delta > 0$ e studio la C.U. sulla semiretta $[\delta, \infty)$.

Calcolo

$$\sup_{x \geq \delta} f_n(x) = f_n(\delta) \quad \text{definitivamente in } n$$

Ma

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\delta) < \infty \quad (\text{visto sopra}).$$

quindi per il cr. di W. c'è conv. uniforme su $[\delta, \infty)$ per ogni $\delta > 0$.

(3) Ricopio

∞

(3) Ricopio

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^p x^{p+1} e^{-nx}, \quad x > 0$$

$$\geq \int_1^{\infty} \dots$$

Prendiamo $t \in [n, n+1]$, ovvero

$$\boxed{n \leq t} \leq n+1$$

$$n \geq t-1$$

quindi

$$n^p \geq (t-1)^p$$

$$e^{-nx} \geq e^{-tx} \quad \text{perché} \quad n \leq t \iff -n \geq -t$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^p x^{p+1} e^{-nx}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} n^p x^{p+1} e^{-nx} \, dt$$

$$\geq \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} (t-1)^p x^{p+1} e^{-tx} \, dt$$

$$= \int_1^{\infty} \boxed{(t-1)^p} x^{p+1} e^{-tx} \, dt$$

(4) Devo provare che f NON cont. in $x=0$ ovvero devo provare che

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) \neq f(0) = 0$$

$t-1=s$, $dt = ds$

$$= \int_0^{\infty} s^p x^{p+1} e^{-sx} e^{-x} \, ds$$

$$= x^{p+1} e^{-x} \int_0^{\infty} s^p e^{-sx} \, ds$$

$$= x \quad \ldots \quad \int_0$$

$sx = r$

$s = \frac{r}{x} \quad (x > 0) \qquad = x^{p+1} e^{-x} \int_0^\infty \frac{r^p}{x^p} e^{-r} \frac{dr}{x}$

$ds = \frac{1}{x} dr$

$$f(x) \geq \ldots = e^{-x} \boxed{\int_0^\infty r^r e^{-r} dr}$$

$$\vee$$
$$0$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) \geq \lim_{x \to 0} e^{-x} \int_0^\infty r^r e^{-r} dr$$

$$\|$$

$$\int^\infty r^r e^{-r} dr > 0$$

$\Rightarrow$ f NON CONT. IN $x = 0$

Torno al punto ③.

ORA DA ④ deduco che non può essere conv. unif. su $[0, \infty)$ perché la somma f NON È CONT in $x = 0$.

$\square$

TOPOLOGIA DI UNO SPAZIO METRICO

X insieme
d funz. distanza $\quad (X, d)$ SM

Poi

$$B_r(x) = \{ y \in X : d(y, x) < r \} \qquad x \in X, \; r > 0.$$

A noi interessa

$$X = \mathbb{R}^n$$

d = dist. Euclidea.

DEF

① Un insieme $A \subset X$ si dice <u>aperto</u> se $\forall x \in A \ \exists r > 0$ tale che $B_r(x) \subset A$.

② Un insieme $C \subset X$ si dice <u>chiuso</u> se $A = X \setminus C$ è aperto.

Esempi + Commenti

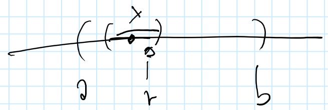
① X è aperto $\Rightarrow$ $\emptyset$ è chiuso

$\emptyset$ è aperto $\Rightarrow$ X è chiuso

Dunque $\emptyset, X$ sono cont. sia aperti che chiusi

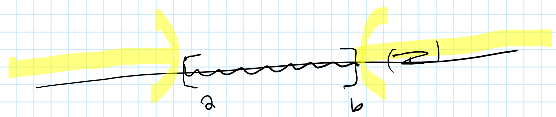
② $X = \mathbb{R}$ con $d(x,y) = |x-y|$. Allora

- $(a,b) \subset \mathbb{R}$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$ sono insiemi aperti



$B_r(x) \subset (a,b)$ per $r > 0$ piccolo

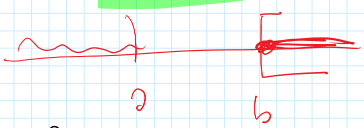
- $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $-\infty < a, b < \infty$



sono insiemi chiusi

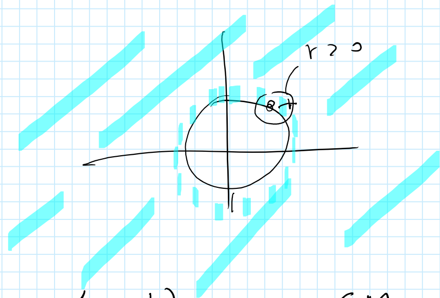
- $[a, \infty)$ è chiuso
  $(-\infty, b]$ è chiuso.

- L'insieme $[a, b)$ non è <u>aperto</u>. non è chiuso.



③ In $X = \mathbb{R}^2$ con d = dist. standard

- $\{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$ è aperto
- $\{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1\}$ è chiuso

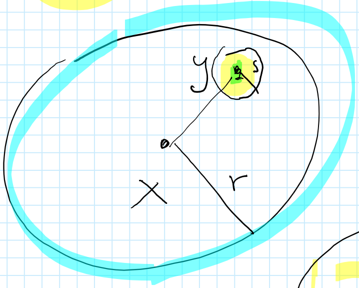


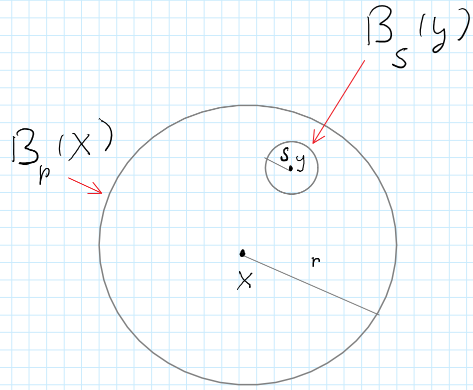
Prop Sia (X,d) uno SM. Allora $\forall x \in X$ e $\forall r>0$ la palla $B_r(x)$ è un insieme aperto.

Dim. Devo verificare che $\forall y \in A = B_r(x)$ esiste un $s>0$ tale che

$$B_s(y) \subset A = B_r(x)$$

$$d(x,y) < r$$





Prendo $z \in B_s(y) \iff d(z,y) < s$.

Voglio che sia $z \in B_r(x)$ ovvero voglio che $d(z,x) < r$.

Come scelgo s?

$$d(z,x) \le \underline{d(z,y)} + \underline{\underline{d(y,x)}} < \underbrace{s + d(y,x)}_{< r}$$

Voglio

Quindi devo scegliere

$$\underline{\underline{0 <}}\, s < \underbrace{r - d(x,y)}_{> 0}$$

ok

DEF (Interno, chiusura, frontiera)

Sia $A \subset X$ un insieme

i) Un p.to $x \in X$ si dice p.to interno di A se esiste $r>0$ tale che $B_r(x) \subset A$

ii) L'interno di A è l'insieme

$$\mathrm{int}(A) = \mathring{A} = \{ x \in X : x \text{ è un p.to } \}$$

interno di A.

iii) Un punto $x \in X$ si dice p.to di chiusura di A se:

$\forall r > 0$ si ha $B_r(x) \cap A \neq \emptyset$.

iv) La chiusura di A è l'insieme

$$\overline{A} = \{ x \in X : x \text{ è un p.to di chiusura di } A \}.$$