Lezione 19

venerdì 29 aprile 2016 08:31

v) La frontiera di un insieme $A \subset X$ è l'insieme

$$\partial A = \{ x \in X : B_r(x) \cap A \neq \emptyset \ \forall r>0, \ B_r(x) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset \ \forall r>0 \}$$

ovvero $\partial A = \overline{A} \cap \overline{(X \setminus A)}$

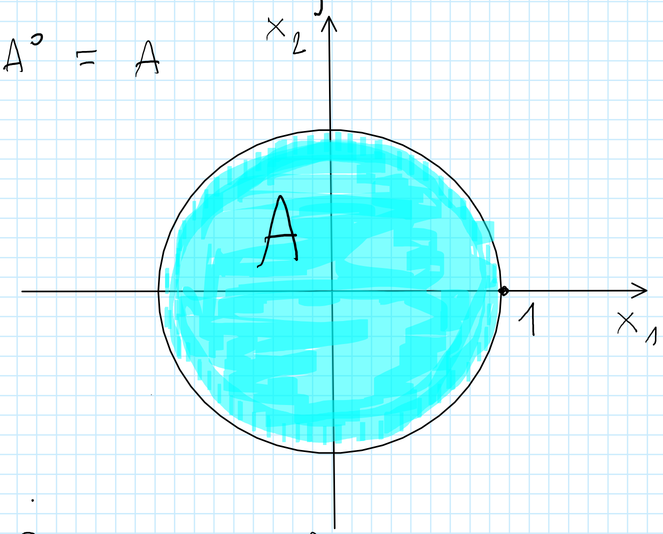
Commenti:

- $\overset{\circ}{A} \subset A$
- $\overline{A} \supset A$
- $\partial A \subset \overline{A}$

Esempio $X = \mathbb{R}^2$ dist. $= |x - y|$

$$A = \{ x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1 \}$$

- A è aperto e $\overset{\circ}{A} = A$



- A non è chiuso.
- Infine $\overline{A} = \{ x \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1 \}$

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{(\mathbb{R}^2 \setminus A)}$$

$$= \{ x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1 \}$$

Prop Siano $A \subset X$ un insieme e $x \in X$. Sono equivalenti:

A) $x \in \overline{A}$

B) Esiste una succ. di punti $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

tale che $x_n \in A \quad \forall n \in \mathbb{N}$ e inoltre

$$x_n \xrightarrow[n \to \infty]{(X,d)} x$$

Dim $A) \Rightarrow B)$

$$x \in \bar{A} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} B_r(x) \cap A \neq \emptyset \quad \forall r > 0$$

In fatti $B_{\frac{1}{n}}(x) \cap A \neq \emptyset \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Quindi $\forall n \in \mathbb{N} \ \exists \ x_n \in B_{1/n}(x) \cap A$

ovvero: $x_n \in A \quad \forall n$

$$0 \leq d(x_n, x) < \frac{1}{n}$$

$$d(x_n, x) \xrightarrow{n \to \infty} 0, \qquad \frac{1}{n} \to 0$$

$B) \Rightarrow A)$ Provo equiv. che

$A)$ falsa $\Rightarrow$ $B)$ falsa.

Sia $A)$ falsa: ovvero $x \notin \bar{A}$

ovvero $\exists r > 0$ tale che

$$B_r(x) \cap A = \emptyset$$

Ma allora non può esistere $\underset{\substack{\forall n \ \cap \\ A}}{x_n} \xrightarrow[n \to \infty]{} x$

perché avrei $d(x_n, x) < r$.

Quindi $B)$ è falsa. $\square$

TEOR. Sia (X, d) uno SM e sia $A \subset X$.

Allora:

i) A è aperto $\Leftrightarrow$ $A = A^\circ$;

ii) A è chiuso $\Leftrightarrow$ $A = \bar{A}$.

DEF (Topologia di X) La topologia di X è la seguente famiglia di sottoinsiemi di X:

$$\tau(X) = \{A \in P(X) : A \text{ è aperto}\}$$

Quindi $\tau(X) \subset P(A)$.

TEOR La topologia di X verifica le seguenti proprietà (Assiomi):

(A1) $X, \emptyset \in \tau(X)$

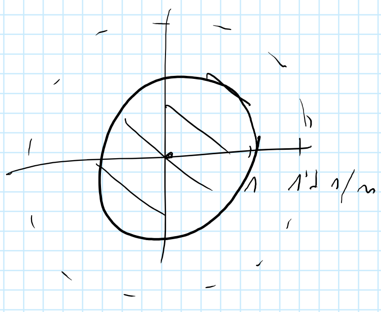
(A2) $A_1, A_2 \in \tau(X) \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \tau(X)$

(A3) Se $A_\alpha \in \tau(X)$ $\forall \alpha \in \mathcal{A}$ $\Rightarrow \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha \in \tau(X)$

Esempio L'intersezione numerabile di aperti NON è in generale un insieme aperto:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left\{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1 + \frac{1}{n}\right\}}_{\text{è aperto } \forall n} = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1\}$$

NON è aperto.



OSSERVAZIONE Sono vere:

(C1) $X, \emptyset$ sono chiusi

(C2) se C_1 e C_2 sono chiusi allora $C_1 \cup C_2$ è un insieme chiuso

(C3) Se C_α, $\alpha \in \mathcal{A}$, sono tutti chiusi allora

$$\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} C_\alpha$$ è ancora un insieme chiuso.

TEOR (Caratterizz. topologica della continuità)
Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due SM, e sia $f: X \to Y$.
Sono equivalenti:

(1) f è continua da X in Y

(2) $\{x \in X : f(x) \in A\} =: f^{-1}(A) \subset X$ è aperto in X per ogni aperto $A \subset Y$

(3) $f^{-1}(C) \subset X$ è chiuso in X per ogni insieme chiuso $C \subset Y$.

Dim

(1) $\Rightarrow$ (2) Sia $f: X \to Y$ continua
Sia $A \subset Y$ aperto.

Devo provare: $f^{-1}(A) \subset X$ aperto.

Sia $x \in f^{-1}(A)$, devo vedere che è un p.to interno.

$$x \in f^{-1}(A) \overset{\text{def } f^{-1}}{\iff} f(x) \in A \text{ aperto}$$

$$\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(f(x)) \subset A$$

palla in Y

quindi

$$f^{-1}(B_\varepsilon(f(x))) \subset f^{-1}(A)$$

Ora, f è cont. in x:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; : \; d_X(\bar{x}, x) < \delta \Rightarrow d_Y(f(\bar{x}), f(x)) < \varepsilon$$

ovvero

$$f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x))$$

Dunque

$$B_\delta(x) \subset f^{-1}(f(B_\delta(x))) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(x))) \subset f^{-1}(A)$$

Ho provato che

$$\forall x \in f^{-1}(A) \; \exists \delta > 0 \text{ tale che}$$

$$B_\delta(x) \subset f^{-1}(A)$$

(2) $\Rightarrow$ (1) L'ipotesi è che $f^{-1}(A) \subset X$ è aperto in X per ogni $A \subset Y$ aperto

Devo provare che f è cont. su X.
Preso $x_0 \in X$ provo che f è cont. in x_0. Ovvero devo provare che

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \text{ tale che}:$$

$$d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

ovvero vogliamo avere

$$f(B_\delta(x_0)) \subset B_\varepsilon(f(x_0))$$

Consideriamo

$$f^{-1}(B_\varepsilon(f(x_0)))$$

$$f^{-1}(\underbrace{B_\varepsilon(f(x_0))}_{=A})$$ è un insieme aperto

Quindi dalla ipotesi trovo che $\boxed{}$ è aperto.

Certamente

$$x_0 \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(x_0)))$$

Quindi esiste $\delta > 0$ tale che

$$B_\delta(x_0) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(x_0)))$$

Quindi

$$f(B_\delta(x_0)) \subset \underbrace{f(f^{-1}(B_\varepsilon(f(x_0))))}_{\subset B_\varepsilon(f(x_0))}$$

$\square$

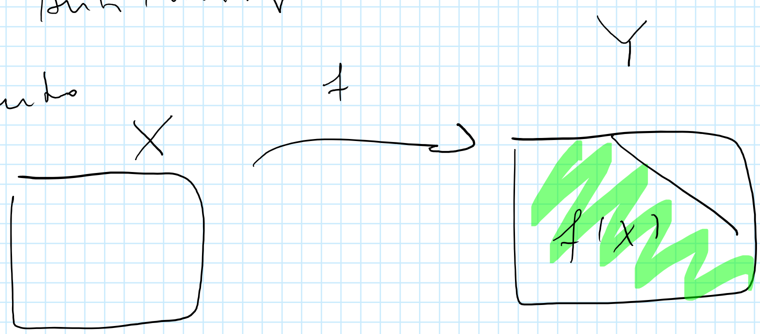
Commento $f : X \to Y$

Dato $A \subset Y$

$$\boxed{f^{-1}(A)} = \{x \in X : f(x) \in A\}$$

Antiimmagine

Commento



$$f(f^{-1}(Y)) \neq Y$$

$$f(f^{-1}(Y)) \neq Y$$

<u>COR</u> X, Y, Z tre spazi metrici

Siano $f: X \to Y$
$g: Y \to Z$ due funzioni continue

Allora $g \circ f: X \to Z$ è cont.

Dim. Sia $A \subset Z$ aperto $\quad (g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$

$$\underset{\text{aperto}}{A \subset Z} \implies \underset{\text{aperto in } Y}{g^{-1}(A) \subset Y} \implies f^{-1}(g^{-1}(A)) \subset X$$

Aperto in X

Quindi $g \circ f$ è cont.

$\square$

<u>ES</u> Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione e consideriamo

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > f(x)\}$$

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq f(x)\}$$

Dimostrare o confutare le seguenti affermazioni.

1. Se f è cont. allora A è aperto
2. Se A è aperto allora f è cont
3. Se f è cont. allora C è chiuso
4. Se C è chiuso allora f è cont.

(4) Se C è chiuso allora f è cont.

Soluz. (1) VERO

Consideriamo $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(x,y) = f(x) - y$$

F è continua.

Quindi $F^{-1}(A)$ è aperto in $\mathbb{R}^2$

se $A \subset \mathbb{R}$ aperto.

Ma:

$$A = \{ y > f(x) \} = \{ F(x,y) = f(x) - y < 0 \}$$

$$= F^{-1}\left(\underbrace{(-\infty, 0)}_{\text{è un insieme aperto di } \mathbb{R}} \right)$$

E quindi A è aperto.

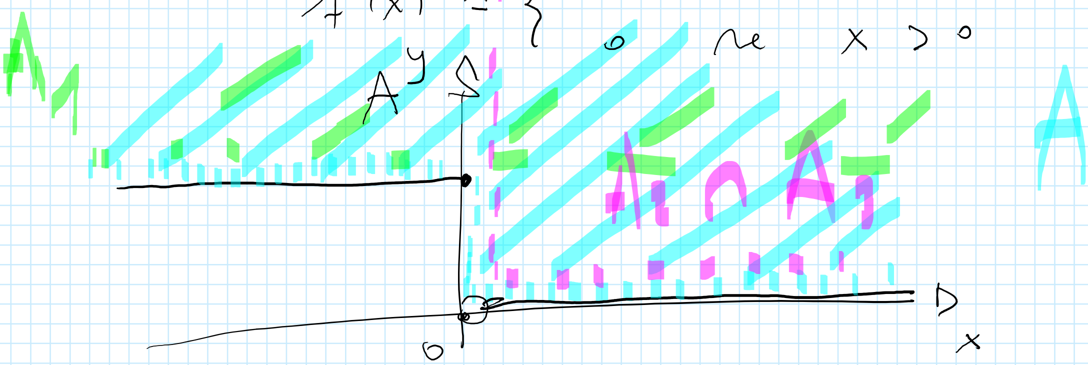
(2) Ipotesi: A è aperto,

Domanda: È vero che f è cont.?

NO. Esempio

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 0 \\ 0 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$



A è aperto. Infatti

$$A = A_1 \cup (A_2 \cap A_3)$$

$A_1 = \{(x,y) : y > 1\}$

è aperto

$A_2 = \{ y > 0 \}$ aperto

$A_3 = \{ x > 0 \}$ aperto

$\cup$