Lezione 2

lunedì 7 marzo 2016 12:21

ES. 4 Serie armonica.

Vogliamo provare

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \quad \text{Serie diverge}$$

Attenzione: La CN di convergenza è verificata

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Dimostrazione:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}} + \dots$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{= 1/2} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}_{= 1/2} + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} + \dots = \infty$$

Concludo per confronto che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

$\square$

ES. 5 Dato un parametro reale $\alpha > 0$ considero la serie armonica generalizzata:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

TEOR. La serie arm. gen. converge se e solo se $\alpha > 1$.

Dim. Caso $\alpha \geq 2$.

$$n^\alpha \geq n^2 \iff \frac{1}{n^2} \geq \frac{1}{n^\alpha}$$

Ma allora

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}}_{\text{Converge}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

Caso $0 < \alpha \leq 1$. In questo caso:

$$n^\alpha \leq n \iff \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^\alpha}$$

Ora sommo

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}}_{\text{diverge}} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

Se $1 < \alpha < 2 \implies$ Serie converge.
Dim. Rinviata.

$\square$

Criteri della Radice e del Rapporto.

Si applicano solo a serie reali positive: $a_n \geq 0$ $\forall n$.
Ossia che le somme parziali

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

sono una succ. crescente e quindi la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

è sempre definita reale o $+\infty$.

TEOR. Siano $0 \leq a_n \leq b_n$ definitivamente, ovv. $\exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq \bar{n}$ le dis. sono vere.
Allora

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$;

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$.

(Criterio del confronto).

TEOR (Criterio della Radice)

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una succ. reale non negativa, $a_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Sia poi

$$L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \in [0, \infty]$$

Allora:

① Se $L < 1$ allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

② Se $L > 1$ allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ diverge. Di più, posso dire che il termine generale NON è infinitesimo.

Dim ① $L < 1$ ovvero

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L < 1$$

Esiste $L < q < 1$. Allora esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq \bar{n}$ si ha

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q \iff \underline{\underline{a_n \leq q^n}}$$

Allora sommo e trovo:

$$\underbrace{\sum_{n=\bar{n}}^{\infty} a_n}_{\text{converge}} \Leftarrow \leq \sum_{n=\bar{n}}^{\infty} q^n \underbrace{<}_{\substack{\text{Serie Geometrica} \\ \text{con } 0 \leq q < 1}} \infty$$

② $L > 1$ ovvero

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L > 1$$

Esiste $1 < q < L$. Esiste una selezione crescente di indici $n \mapsto k_n$ tale che

$$\lim \sqrt[k_n]{a_{k_n}} = L > q$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[k_n]{a_{k_n}} = L > q$$

e di più

$$a_{k_n} \geq q^{k_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

$k_n \to \infty$

Dunque il termine generale NON è infinitesimo.

$$\overset{CN}{\Longrightarrow} \text{ Serie diverge.}$$

$\square$

Commento Se trovo $L = 1$ il criterio fallisce e la serie può sia convergere $\sum \frac{1}{n^2}$ che divergere $\sum \frac{1}{n}$.

Teorema (Criterio del Rapporto) Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale positiva, $a_n > 0$ $\forall n$. Supponiamo che esista il limite

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \in [0, \infty].$$

Allora

① $L < 1 \Rightarrow$ Serie converge $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$;

② Se $L > 1 \Rightarrow$ Serie diverge $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.

Di più, in questo caso si ha

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty.$$

Dim. ① $L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow$ esiste $L < q < 1$

Quindi esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq \bar{n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q \iff a_{n+1} < q \cdot a_n \quad \forall n \geq \bar{n}$$

Itero questa disug.:

$$a_{n+1} < q(a_n) < q^2 \cdot a_{n-1} < q^3 \cdot a_{n-2} < \dots < q^{n-\bar{n}+1} a_{\bar{n}}$$

$$a_{n+1} < q\, a_n < q^2 \cdot a_{n-1} < q^3 \cdot a_{n-2} < \dots < q^{n-\bar{n}+1}\, a_{\bar{n}}$$

$$q \cdot a_{n-1}$$

Riassumo:

$$a_{n+1} < q^n \cdot q^{1-\bar{n}} \cdot a_{\bar{n}}$$

$$\forall n \geq \bar{n}$$

Ma allora

$$\sum_{n=\bar{n}}^{\infty} a_{n+1} \leq q^{1-\bar{n}} \cdot a_{\bar{n}} \sum_{n=\bar{n}}^{\infty} q^n < \infty$$

Converge $\Leftarrow$ per confronto. $\quad q < 1$

(2) Esercizio. $\square$

ESERCIZI

ES. 1 Calcolare $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{2n-1}}$.

Sol.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{2n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{3^{2n}} = 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9^n}$$

$$= 3\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^n - 1\right)$$

$$= 3\left(\frac{1}{1-1/9} - 1\right) = 3\left(\frac{9}{9-1} - 1\right)$$

$$= 3\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{3}{8}$$

ES. 2 Stabilire se converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos(n)}{\sqrt{1+n^3}}.$$

Soluzione. Uso il criterio del confronto:

$$0 \leq \frac{1+\cos(n)}{\sqrt{1+n^3}} \leq \frac{2}{\sqrt{n^3}} = \frac{2}{n^{3/2}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos(n)}{\sqrt{1+n^3}} \leq \sum_{=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < \infty$$ converge

perché $\frac{3}{2} > 1$.

ES 3 Scrivere il numero decimale periodico

$$x = 0,454545\ldots = 0,\overline{45}$$

in forma razionale $x = \frac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{N}$.

Soluzione:

$$x = \frac{4}{10} + \frac{5}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \ldots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{10^{2n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{10^{2n}}$$

$$= 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{10}{(100)^n} + 5 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(100)^n}$$

$$= \ldots = \frac{5}{11}. \qquad \square$$

ES. 4 Verificare che la serie esponenziale converge

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad \left(= e = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \right)$$

Soluzione. Serie a termini positivi.
Uso il Criterio del Rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$$

e dunque

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

CR:

$L = 0 < 1 \Rightarrow$ Serie Converge.

ES. 5 Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \longrightarrow 0$$

Soluzione. $a_n = \frac{n!}{n^n} > 0$

Criterio del Rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!}$$

$$= \frac{n+1}{(n+1)^{n+1}} \cdot n^n =$$

$$= \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$= \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

quindi:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1 \quad \text{sì}$$

CR:

$$L < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} < \infty$$

ES. 6 Determinare tutti gli $x \in \mathbb{R}$ tali che converga la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(2+n)}{n} |x|^n$$

Soluzione. Serie a termini positivi

Provo con il Criterio della Radice:

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{\log(2+n)}{n} |x|^n}$$

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{\log(2+n)}{n}}\,|x|^n$$

$$= \frac{\sqrt[n]{\log(2+n)}}{\sqrt[n]{n}}\,|x|$$

Limiti:

- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ Noto
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\log(2+n)}$

$$\sqrt[n]{\log 2} \le \sqrt[n]{\log(2+n)} \le \sqrt[n]{n+1} \le \sqrt[n]{2n}$$

$\log(1+x) \le x$

$\sqrt[n]{2n} = \sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{n}$, con $\sqrt[n]{2} \xrightarrow{} 1$, $\sqrt[n]{n} \xrightarrow{} 1$

$\sqrt[n]{\log 2} \xrightarrow{n\to\infty} 1$, $\sqrt[n]{\log(2+n)} \xrightarrow{n\to\infty} 1$

Conclusione

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = |x|$$

① $L = |x| < 1 \Rightarrow$ Serie converge CR.

② $L = |x| > 1 \Rightarrow$ Serie diverge.

$x < -1$ e $x > 1$

Studio a parte il caso $L = |x| = 1$, $x = \pm 1$

La serie in questo caso è:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(2+n)}{n}.$$

CN: $\underline{\text{ok}}$

Ma la serie diverge. Infatti

$$\sum^{\infty} \frac{\log(2+n)}{} \quad \sum^{\infty} \log 2 \quad = \infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(2+n)}{n} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log 2}{n} = \infty$$

NOTO

diverge per confronto !!

$\square$