Lezione 20

lunedì 2 maggio 2016 12:30

CALCOLO DIFFERENZIALE IN $\mathbb{R}^n$

Siamo in $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 1$

Base standard

$$e_1, e_2, \dots, e_n \in \mathbb{R}^n$$

dove

$$e_i = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{posizione} \\ i\text{-esima}}}{1}, 0, \dots, 0) \quad i = 1, 2 \dots n$$

DEF 1 (Deriv. parziale).

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto sia $x \in A$, e sia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$.

Diciamo che f ha la derivata parziale i-esima nel punto $x \in A$ se esiste finito il seguente limite

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t e_i) - f(x)}{t} \in \mathbb{R}.$$

Diremo che f è derivabile in x se esistono tutte le derivate parziali

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x).$$

ESEMPIO $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = e^{x^2} \sin y \,, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Avremo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\, e^{x^2} \sin y \,,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{x^2} \cos y \,.$$

ES $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sia $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Non ha le der. parziali in $0 \in \mathbb{R}^n$.
Nei punti $x \neq 0$ invece avremo:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \underset{x \neq 0}{=} \frac{\partial}{\partial x_i} |x|$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i} \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}} \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}} \cdot \cancel{2} x_i$$

$$= \frac{x_i}{|x|}$$

$$\overset{\text{deve essere}}{=} \lim \frac{|x + te_i| - |x|}{t} \,.$$

$$\overset{\text{esprime}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{\qquad}{t}.$$

<u>NOTAZIONI</u> Altre not. per le der. parziali:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \partial_i f = \partial_{x_i} f$$

$$= D_i f = f_{x_i}.$$

<u>OSSERVAZIONE</u> Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ derivabile nel punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Consideriamo $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$$\gamma_1(t) = (x+t, y, f(x+t, y))$$

$$\gamma_2(t) = (x, y+t, f(x, y+t))$$

Al tempo $t=0$ avremo

$$\dot\gamma_1(0) = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) \in \mathbb{R}^3$$

$$\dot\gamma_2(0) = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) \in \mathbb{R}^3$$

I due vettori $\dot\gamma_1(0)$ e $\dot\gamma_2(0)$ generano uno sp. vett. di dim $= 2$ in $\mathbb{R}^3$.

Questo S.V. è il candidato piano tangente nel punto $(\overline{x, y, f(x,y)}) \in \mathbb{R}^3$

al grafico di f:

$$gr(f) = \{ (x, y, f(x,y)) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \}.$$

DEF 2 Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $f: A \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile nel punto $x \in A$. Il vettore

$$Df(x) = \nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right) \in \mathbb{R}^n.$$

Osservazione Il vettore $\nabla f(x) \neq 0$ contiene 2 informazioni:

① La direzione $\dfrac{\nabla f(x)}{|\nabla f(x)|}$ è la direzione di massima crescita di f

② $|\nabla f(x)|$ ci dà la velocità di crescita di f.

DEF 3 (Derivata direzionale)

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto.
Sia $x \in A$ fissato.
Diciamo che $f: A \to \mathbb{R}$ ha derivata direzionale nella direzione $v \in \mathbb{R}^n$ nel punto x se esiste finito il seguente limite

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} \in \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial}{\partial v}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{\qquad}{t} \in \mathbb{R}$$

$$f_v(x) =$$

<u>Esempio</u> Consideriamo $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x = y = 0 \end{cases}$$

Calcolo le derivate direz. in $(x,y) = (0,0)$ nella direzione $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(0+tv) - f(0)}{t}$$

$v \neq 0$

$$= \lim_{t \to 0} \boxed{\frac{1}{t}} \frac{t^2 v_1^2 \boxed{t} v_2}{t^4 v_1^4 + t^2 v_2^2}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{v_1^2 v_2}{t^2 v_1^4 + v_2^2} \qquad \left[= 0 \text{ se } v_1 = 0 \text{ or } v_2 = 0 \right]$$

$$= \frac{v_1^2 v_2}{v_2^2} = \boxed{\frac{v_1^2}{v_2}}$$

NON È LINEARE

Quindi f ha tutte le derivate direzionali in $(x,y) = (0,0)$.

Tuttavia

$$\lim_{t \to 0} f(t, mt^2) = \frac{m}{1+m^2} \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

dipende da $m \in \mathbb{R}$

f non è cont. in 0.

f non potrà avere piano tangente in $(0,0)$.

Premesse di Algebra Lineare

$A \subset \mathbb{R}^n$ aperto

$f : A \to \mathbb{R}^m$ con $m \geq 1$

a valori vettoriali.

Avremo

f ha $\underline{\underline{m}}$ coordinate.

Ci atteniamo alla convenzione di scrivere queste coordinate come vettore colonna

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$$

dove $f_1, \ldots, f_m : A \to \mathbb{R}$

Diciamo che f è deriv. in x se tutte le coord. sono deriv. in x e scriveremo:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \\ \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_i} \end{pmatrix} \qquad i = 1, \dots, n$$

DEF 4 (Matrice Jacobiana di f)

$A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $f : A \to \mathbb{R}^m$, $x \in A$, f deriv. in x. Possiamo formare la matrice

$$J_f(x) = Jf(x) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \\ n \text{ colonne} \end{array} \; m \text{ righe}$$

detta matrice Jacobiana di f in $x \in A$.

ORA: Richiamo di algebra lineare

Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una trasformazione lineare, $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n ; \mathbb{R}^n)$

$e_1, \dots, e_n$ base standard di $\mathbb{R}^n$

$e_1, \dots, e_m$ " " di $\mathbb{R}^m$

Esistono $T_{ij} \in \mathbb{R}$ tali che

$$T e_j = \sum_{i=1}^{m} T_{ij} e_i \qquad \forall j = 1, \dots, n$$

Se ora $x \in \mathbb{R}^n$ lo penso come vettore colonna

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Allora avremo

$$T(x) = Tx = \begin{pmatrix} T_{11} & \dots & T_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{m1} & \dots & T_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} T_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} T_{mj} x_j \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

Quindi $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ è associata la matrice (T_{ij}) $\begin{matrix} i = 1 \dots m \\ j = 1 \dots n \end{matrix}$

Viceversa data (T_{ij}) forma definire $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ come sopra.

DEF (Differenziale) Siano $A \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, aperto, $f : A \to \mathbb{R}^m$, $x_0 \in A$ fissato. Diciamo che f è differenziabile nel punto $x_0 \in A$ se esiste $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ tale che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0.$$

Chiameremo la trasformazione T

il differenziale di f in x_0 e scriveremo

$$df(x_0) = T.$$

Commenti:

(1) Se il diff. esiste allora è unico

Deriva dall'unicità del limite e dal fatto che

$$Tv = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_0+tv) - f(x_0)}{t}$$

$\forall v$

(2) Quando $n = 1$ la nozione di derivabilità e differenziabilità coincidono

$$df(x_0) = f'(x_0) \in \mathbb{R}$$

(3) Supponiamo che $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sia <u>lineare</u>. Allora

$$\underset{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)}{\underset{\cap}{df(x_0)}} = f$$

Infatti

$$0 \overset{?}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \overset{\overset{f}{\parallel}}{\boxed{df(x_0)}}(x - x_0)}{|x - x_0|}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{|x - x_0|} \left(\cancel{f(x)} - \cancel{f(x_0)} - \left(\cancel{f(x)} - \cancel{f(x_0)}\right) \right) = 0$$

$$= 0 \qquad \text{ok}$$

(4) Caso vettoriale: $f : A \to \mathbb{R}^m$ è differenziabile se e solo se le sue m-coordinate $f_1, \dots, f_m : A \to \mathbb{R}$ sono differenziabili.

TEOR (Caratterizz. della diff.)
Sia $f : A \to \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $x_0 \in A$. Sono equivalenti queste 2 affermaz.:

(A) f è diff. nel punto x_0

(B) Esistono $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ ed una funzione $E_{x_0} : A \to \mathbb{R}^m$ tali che

$$f(x) = f(x_0) + \boxed{T(x - x_0)} + E_{x_0}(x) \qquad x \in A$$

e inoltre

$$\lim_{x \to x_0} \frac{E_{x_0}(x)}{|x - x_0|} = 0.$$