Lezione 23

lunedì 9 maggio 2016 12:23

Rim Teor. sul diff. della funz. composta

$$f(x) = f(x_0) + \boxed{T(x-x_0) + F_{x_0}(x)}, \quad x \in A$$

$$T = df(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$$

$$\frac{F_{x_0}(x)}{|x-x_0|} \to 0 \quad x \to x_0$$

$$g(y) = g(y_0) + S(y-y_0) + G_{y_0}(y), \quad y \in B$$

$$S = dg(y_0)$$

$$y_0 = f(x_0) \qquad \frac{G_{y_0}(y)}{|y-y_0|} \to 0 \quad y \to y_0 .$$

Dunque

$$g(f(x)) = g(f(x_0)) + S\left(\boxed{f(x) - f(x_0)}\right) + G_{f(x_0)}(f(x)), \quad x \in A$$

$$= g(f(x_0)) + \boxed{S\left(T(x-x_0) + F_{x_0}(x)\right)} + G_{f(x_0)}(f(x))$$

$$= g(f(x_0)) + S(T(x-x_0)) +$$

$$+ S(F_{x_0}(x)) \ldots = H(x)$$

$$+ \; S\left(F_{x_0}(x)\right) \qquad = H_{x_0}(x)$$
$$+ \; G_{f(x_0)}\left(f(x)\right)$$

Se provo che

$$\frac{H_{x_0}(x)}{|x - x_0|} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0 \qquad ?$$

allora ottengo che $g \circ f$ è diff. in x_0 e di più

$$d(g \circ f)(x_0) = S \circ T$$
$$= dg(f(x_0)) \circ df(x_0)$$

ORA

$$\frac{S(F_{x_0}(x))}{|x - x_0|} = S\Bigg(\underbrace{\frac{F_{x_0}(x)}{|x - x_0|}}_{\xrightarrow[x \to x_0]{} 0}\Bigg) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$$

Poi

$$\frac{G_{f(x_0)}(f(x))}{|x - x_0|} = (*)$$

Ipotesi:

$$\frac{G_{y_0}(y)}{|y - y_0|} \xrightarrow[y \to 0]{} 0$$

Allora

$$x \to \quad f(x) \to T(x_0)$$

Allora

$$x \to x_0 \implies \underset{y}{\underset{\|}{f(x)}} \to \underset{y_0}{\underset{\|}{f(x_0)}}$$

perché

f è cont.

in x_0

in aperto è diff. in x_0.

$$\circledast = \frac{G_{f(x_0)}(f(x))}{|x - x_0|} = \frac{G_{f(x_0)}(f(x))}{\underset{y}{\underset{\|}{f(x)}} - \underset{y_0}{\underset{\|}{f(x_0)}}} \left| \frac{T(x-x_0) + F_{x_0}(x)}{|x - x_0|} \right|$$

$\downarrow$ $x \to x_0$

0

Rimane limitato per $x \to x_0$

Fine dimostrazione.

<u>ESEMPIO</u> Derivata di una funzione lungo una curva.

$f : A \to \mathbb{R}$ $\quad A \subset \mathbb{R}^n$ aperto

differenziabile

$\gamma : [0,1] \to A$ una curva derivabile

Allora:

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = J_f(\gamma(t))\, J_\gamma(t) =$$

Notazioni

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{pmatrix} \qquad t \in [0,1]$$

$$\begin{pmatrix} \dot\gamma_1(t) \\ \dot\gamma_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\gamma_n(t)$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\gamma(t)) \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(\gamma(t)) \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(\gamma(t)) \right) \begin{pmatrix} \dot\gamma_1(t) \\ \dot\gamma_2(t) \\ \vdots \\ \dot\gamma_n(t) \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t))\, \dot\gamma_i(t)$$

$$= \langle \nabla f(\gamma(t)), \dot\gamma(t) \rangle \qquad t \in [0,1]$$

OSSERVAZIONE $f : A \to \mathbb{R}$

Dato $s \in \mathbb{R}$ consideriamo

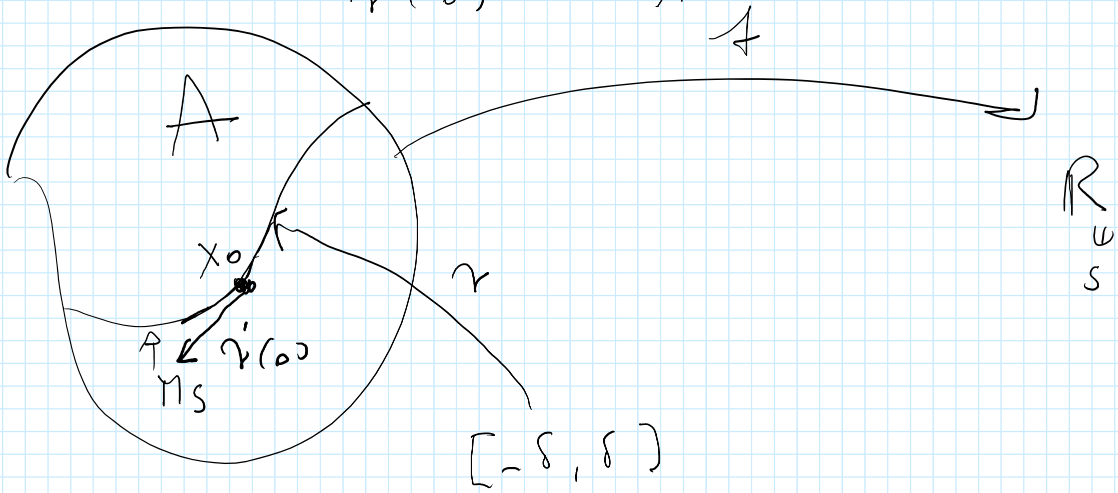
$$M_s = \{ x \in A : f(x) = s \}$$

Insieme di livello s di f

Prendo $x_0 \in M_s$

Prendo $\gamma : [-\delta, \delta] \to M_s$ derivabile

$$\gamma(0) = x_0$$



Allora

Allora

$$0 = \frac{d}{dt} f(\gamma(t))\Big|_{t=0} = \langle \nabla f(\gamma(t)), \dot\gamma(t) \rangle\Big|_{t=0}$$

$$= \langle \nabla f(X_0), \dot\gamma(0) \rangle$$

dove $\dot\gamma(0)$ è un generico vettore tangente al M_s

Quindi $\nabla f(x_0)$ è un "vettore ortogonale" al M_s nel punto x_0.

Teorema del Valor Medio

TEOREMA Sia $f: A \to \mathbb{R}$ una funz. diff. nell'aperto $A \subset \mathbb{R}^n$; e siano $x, y \in A$ tali che il segmento

$$[x,y] = \{ tx + (1-t)y \in \mathbb{R}^n : t \in [0,1] \}$$

è interamente contenuto in A.
Allora esiste un punto $z \in [x,y]$ tale che

$$f(x) - f(y) = \langle \nabla f(z), x - y \rangle .$$

Dim. Sia $\varphi(t) = f(\gamma(t))$, $t \in [0,1]$
dove

$$\gamma(t) = tx + (1-t)y$$

Dunque $\varphi: [0,1] \to \mathbb{R}$ è deriv. in tutti i punti.

Quindi per il Teor. Lagrange: esiste $t^* \in [0,1]$ tale che

$$g(1) - g(0) = g'(t^*).$$

$$g(1) = f(r(1)) = f(x)$$
$$g(0) = f(r(0)) = f(y)$$

Poi

$$g'(t) = \langle \nabla f(r(t)), r'(t) \rangle$$

$$g = f \circ r$$

$$r'(t) = x - y \quad \forall t$$

Quindi chiamando $z = r(t^*)$ avremo

$$f(x) - f(y) = \langle \nabla f(z), x - y \rangle.$$

$\square$

TEOR 2 Sia $f: A \to \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto

Siano $x, y \in A$ tali che $[x,y] \subset A$

Allora $\forall v \in \mathbb{R}^m$ fissato esiste un $z \in [x,y]$ tale che:

$$\langle f(x) - f(y), v \rangle = \langle df(z)(x-y), v \rangle.$$

Dim. Possiamo saltarla.

DEF La norma operatoriale di $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ è il seguente numero

$$\|T\| = \sup_{|x| \leq 1} |Tx| < \infty.$$

Osserv. Avremo sempre:

$$|Tx| \leq \|T\| \cdot |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n .$$

$$\frac{1}{|x|}|Tx| = \left|\frac{1}{|x|} Tx\right|$$
$$= \left|T\left(\frac{x}{|x|}\right)\right| \leq \|T\|$$

COROLLARIO Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto convesso,
ovvero: $\forall x, y \in A \Rightarrow [x,y] \subset A$.
Sia poi $f : A \to \mathbb{R}^m$ una funzione differenziabile tale che $\|df(x)\| \leq L < \infty$ $\forall x \in A$. Allora:

$$|f(x) - f(y)| \leq L\,|x-y|$$

Dim. Fisso $x, y \in A \Rightarrow [x,y] \subset A$
Allora dato $v \in \mathbb{R}^m$ avremo:

$\exists\, z \in [x,y]$ t. c.

$$\langle f(x) - f(y), v \rangle = \langle df(z)(x-y), v \rangle$$

scelgo $v = f(x) - f(y)$. Allora

$$|f(x) - f(y)|^2 = \langle df(z)(x-y), f(x) - f(y) \rangle$$
$$\wedge \quad C-S$$

$$\underbrace{|df(z)(x-y)|}\ \cdot\ |f(x)-f(y)|$$

$$\wedge\!\!|$$

$$\|df(z)\|\ |x-y|$$

$$\wedge\!\!|$$

$$L$$

Riassumo

$$|f(x)-f(y)|^2 \leq L\,|x-y|\,|f(x)-f(y)|$$

$$\Downarrow$$

$$|f(x)-f(y)| \leq L\,|x-y|$$

$\square$

Funzioni di classe C^1

$A \subset \mathbb{R}^n$ aperto $\quad f : A \to \mathbb{R}^m \quad m \geq 1$

$$f = (f_1, \dots, f_m)$$

DEF Diciamo che f è di classe $C^1(A;\mathbb{R}^m)$ $\left(f \in C^1(A;\mathbb{R}^m)\right)$ se tutte le derivate parziali

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \in C(A) \qquad \forall i = 1 \dots m \quad \forall j = 1, \dots, n$$

Tutte le der. parziali sono funzioni continue su tutto A.

TEOR Se $f \in C^1(A;\mathbb{R}^m)$ allora

f è differenziabile in ogni punto di A.

Rimando

$$f \in C^1(A) \underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} f \text{ diff. in } A \underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow}$$

- f ha tutte le der. direzionali
- f è cont. in quel punto

Dim. Caso $m=1$.

Consideriamo $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$

$$Th = \langle \nabla f(x_0), h \rangle$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)\, h_j$$

Dobbiamo allora provare che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - T(x-x_0)}{|x-x_0|} = 0.$$

Conti $h = x - x_0$

$$f(\overset{x}{\overset{\shortparallel}{x_0+h}}) - f(x_0) = f\left(x_0 + \sum_{i=1}^{n} h_i e_i\right) - f(x_0)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(f\left(x_0 + \sum_{i=1}^{j} h_i e_i\right) - f\left(x_0 + \sum_{i=1}^{j-1} h_i e_i\right) \right)$$

$$\sum^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\left(x_0 + \sum_{i=1}^{j-1} h_i e_i + h_j^* e_j\right) \cdot h_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\left(x_0 + \sum_{i=1}^{j-1} h_i e_i + h_j^* e_j\right) \cdot h_j$$

Esistono per Lagrange

$h_j^* \in [0, h_j)$.

Formo

$$\frac{1}{|h|}\left(\underbrace{f(x_0+h) - f(x_0)} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)\, h_j \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{h_j}{|h|}\left[\frac{\partial f}{\partial x_j}\Big(\underbrace{x_0 + \sum_{i=1}^{j-1} h_i e_i + h_j^* e_j}_{\xrightarrow{h \to 0} x_0}\Big) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) \right] \xrightarrow{h \to 0} 0$$

Limitato

perchè $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ sono continue nel punto x_0.