Lezione 24

martedì 10 maggio 2016 12:27

ESERCIZIO Sia $\alpha > 0$ e consideriamo

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} |y|^\alpha \sin\left(\frac{x}{y}\right) & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$$

Calcolare tutti gli $\alpha > 0$ tali che:

i) f sia diff. su $\mathbb{R}^2$

ii) le derivate parziali di f siano continue nel punto $0 \in \mathbb{R}^2$

iii) f sia di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$

Soluz. Su $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$

$$f(x,y) = |y|^\alpha \sin\left(\frac{x}{y}\right)$$

è certamente di classe $C^1(A)$.

$C^\infty(A)$

(1) Voglio f diff. su tutto $\mathbb{R}^2$.

$f \in C^1(A) \Rightarrow f$ diff. in A

Voglio che f sia diff. anche nei punti $(x_0, 0) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$.

nei punti $(x_0, 0) \in \mathbb{R}^2$ $\forall x_0 \in \mathbb{R}$.

Derivate parziali

$$f_x(x_0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\overset{\overset{0}{\parallel}}{f(x_0+t,0)} - \overset{\overset{0}{\parallel}}{f(x_0,0)}}{t}$$

$$= 0 \qquad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

$$f_y(x_0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(x_0,y) - \overset{\overset{0}{\parallel}}{f(x_0,0)}}{y}$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{|y|^\alpha \sin\left(\frac{x_0}{y}\right)}{y}$$

$x_0 \neq 0$

$$= \begin{cases} 0 & \alpha > 1 \\ \text{non esiste} & \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Concludo che:

$\alpha \leq 1 \Rightarrow f_y(x_0,0)$ con $x_0 \neq 0$ NON ESISTE

quindi

$\alpha \leq 1 \Rightarrow f$ NON diff. su tutto $\mathbb{R}^2$

Sia ora $\boxed{\alpha > 1}$.

Nei punti $(x_0, 0) \in \mathbb{R}$ avremo

Nei punti $(x_0, 0) \in \mathbb{R}$ avremo

$$f_x(x_0, 0) = 0$$

$$f_y(x_0, 0) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\nabla f(x_0, 0) = (0, 0).$$

Faccio il test della differenziabilità

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} \frac{f(x,y) - \underbrace{f(x_0,0)}_{0} - \underbrace{\langle \nabla f(x_0,0), (x-x_0, y)\rangle}_{0}}{\|(x-x_0, y)\|} \overset{?}{=} 0$$

caso $\alpha > 1$

$$= \lim_{(x,y)\to(x_0,0)} \frac{|y|^\alpha \sin\left(\frac{x}{y}\right)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + y^2}} \;\cancel{\overset{?}{=}}\; = 0$$

sì

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + y^2} \geq \sqrt{y^2} = |y|$$

$$\left| \frac{|y|^\alpha \sin\left(\frac{x}{y}\right)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + y^2}} \right| \leq \frac{|y|^\alpha \cdot 1}{|y|} = |y|^{\alpha - 1}$$

$$= |y|^{\alpha - 1}$$

Conclusione

$\alpha > 1 \Rightarrow f$ è diff. su tutto $\mathbb{R}^2$

$\downarrow\ y \to 0$ perché $\alpha > 1$

0

(ii) Calcola tutti gli $\alpha > 0$ tali che le der. parziali di f siano continue in $0 \in \mathbb{R}^2$.

Devo limitarlo studio al caso $\underline{\alpha > 1}$

Conti: $y \neq 0$

$$f_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(|y|^{\alpha} \sin\left(\frac{x}{y}\right)\right)$$

$$= \boxed{|y|^{\alpha} \cos\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \frac{1}{y}}$$

ok

$$f_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(|y|^{\alpha} \sin\left(\frac{x}{y}\right)\right)$$

ok

$$= \boxed{\alpha |y|^{\alpha-1} \frac{y}{|y|} \sin\left(\frac{x}{y}\right)} +$$

$$\boxed{-x|y|^{\alpha-2} \cos\left(\frac{x}{y}\right)}$$

$\alpha > 1$

$= 0$

$\alpha > 1$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \boxed{} \quad \boxed{} = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \boxed{} = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\,|y|^{\alpha-2} \cos\left(\frac{x}{y}\right) = \begin{cases} 0 & \alpha \geq 2 \\ \text{non esiste finito} & \alpha < 2 \end{cases}$$

Guardo il limite lungo la curva

$$y = x^{\varepsilon} \qquad x > 0$$

ed $\varepsilon > 0$ fissato

e faccio $x \to 0$ $\quad (\Rightarrow y \to 0)$

Conti

$$x\,|y|^{\alpha-2} = x \; x^{\varepsilon \cdot (\alpha-2)}$$

$$= x^{1+\varepsilon(\alpha-2)}$$

Guardo quando l'esponente è negativo

$$1 + \varepsilon(\alpha - 2) < 0 \qquad \alpha < 2$$

$$\Leftrightarrow \quad \varepsilon(\alpha-2) < -1$$

$$\Longleftrightarrow \quad \underbrace{\varepsilon\,(\alpha-2)}_{<0} < -1$$

$$\Longleftrightarrow \quad \varepsilon > \frac{-1}{\alpha - 2}$$

$$\frac{1}{2-\alpha}$$ è positivo

questo $\varepsilon > 0$

dunque lungo la curva $y = x^{\varepsilon}$
il limite NON esiste.

Concludo:

f_x ed f_y sono continue in $(0,0)$

se e solo se $\alpha \geq 2$.

(iii) Calcolo tutti gli $\alpha > 0$ tali che
$f \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

Devo limitarmi al caso $\alpha \geq 2$.

Studio la cont. nei punti $(x_0, 0)$
di f_x, f_y con $x_0 \neq 0$.

Dalle formule sopra vedo che si ha

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0),\ x_0 \neq 0} f_x(x,y) = f_x(x_0,0) = 0$$
$$\phantom{\lim_{(x,y)\to(x_0,0)}} f_y(x,y) = f_y(x_0,0) = 0$$

se e solo se $\underline{\alpha > 2}$.

$\square$

Derivate di ordine superiore

$A \subset \mathbb{R}^n$ aperto $n \geq 1$

$f : A \to \mathbb{R}$ funzione derivabile, ovvero esistono

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : A \to \mathbb{R}$$

$$\forall i = 1, \ldots, n$$

Possiamo definire, se esistono, le seguenti derivate parziali seconde:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = D_j D_i f$$

$$= f_{x_i x_j}$$

Poi scriviamo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

Linguaggio $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ derivate seconde miste.

ESEMPI $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$x^2 - y^2$

ESEMPI f

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Osserviamo che $f(y,x) = -f(x,y)$.

Noto che

$$f_x(0,0) = 0$$

$$f_y(0,0) = 0$$

Quando $x^2+y^2 \neq 0$ calcolo

$$f_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(xy\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \right) =$$

$$= y\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + yx\,\frac{2x(\cancel{x^2}+y^2) - (\cancel{x^2}-y^2)\,2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= y\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + 2yx^2\,\frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{y(x^2-y^2)(x^2+y^2) + 4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= y\,\frac{x^4 - y^4 + 4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\|$$

$$f(x,y) \quad \circ$$

ora calcolo

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{\overset{\overset{f_x(x,y)}{\|}}{f_x(0,y)} - \overset{\overset{0}{\|}}{\boxed{f_x(0,0)}}}{y}$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{-\cancel{y}}{\cancel{y}}$$

$$= -1$$

Poi

$$f_{yx}(0,0) = +1$$

TEOREMA (Schwarz)

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione con le derivate seconde miste definite in un intorno del punto $0 \in \mathbb{R}^2$. Se le due derivate f_{xy} e f_{yx} sono continue nel punto $0 \in \mathbb{R}^2$ allora

$$f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0).$$

Dim. Definiamo

$$\varphi(h,k) = f(h,k) - f(h,0) - f(0,k)$$

Dim. Definiamo

$$\Delta(h,k) = f(h,k) - f(h,0) - f(0,k) + f(0,0)$$

$$\qquad\qquad\qquad \underbrace{f(h,k) - f(h,0)}_{F(h,k)}$$

$h, k \in \mathbb{R}$

$$F(h,k) := f(h,k) - f(h,0)$$

$$F(0,k) = f(0,k) - f(0,0)$$

$$\Delta(h,k) = F(h,k) - F(0,k)$$

$$= F_x(h^*,k)\, h$$

Esiste $h^* \in [0,h]$ Teor Lagr.

$$= \left(f_x(h^*,k) - f_x(h^*,0)\right) h$$

$$= f_{xy}(h^*,\hat{k})\, h k$$

Esiste $\hat{k} \in [0,k]$

dove se $h,k \to 0 \Rightarrow h^* \to 0$

$\hat{k} \to 0$

Allo stesso modo

$$G(h,k) = f(h,k) - f(0,k)$$

Avremo in questo caso

$$\Delta(h,k) = G(h,k) - G(h,0)$$

$$\Delta(h,k) = \dots$$

$$= G_y(h, k^*)\, k$$

$$= \left(f_y(h,k^*) - f_y(0,k^*)\right) k$$

$$= f_{yx}(\hat{h}, k^*)\, h k$$

$\exists$ esiste

ORA $h = k$

Dunque

$$\frac{\Delta(h,h)}{h^2} = f_{xy}(h^*, \hat{k})$$

$$\frac{\Delta(h,h)}{h^2} = f_{yx}(\hat{h}, k^*)$$

Concludo che

perché f_{xy} è cont

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{h \to 0} f_{xy}(h^*, \hat{k}) =$$

$$= \lim_{h \to 0} f_{yx}(\hat{h}, k^*) =$$

$$= f_{yx}(0,0)$$

f_{xy} è cont.

DEF Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto.
Diciamo che $f : A \to \mathbb{R}$ è di classe C^2, $f \in C^2(A)$, se esistono e sono continue in A tutte le derivate parziali seconde

$$D_i D_j f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \in C(A).$$

Possiamo allora definire la matrice Hessiana di f

$$D^2 f(x) = Hf(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1,\dots,n}$$

$$x \in A.$$

Osserviamo che $Hf(x)$ $x \in A$, è una matrice simmetrica $n \times n$.

Possiamo definire $C^k(A)$ $\forall\, k \geq 1$

$$C^\infty(A) = \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(A).$$