Insiemi compatti

(X, d) sia uno sp. metrico

DEF (Insiemi sequenzialmente) compatti!
Diciamo che $K \subset X$ è compatto se ogni successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in K possiede una sottosuccessione che converge ad un limite $\underline{x \in K}$.

Poi diciamo che $K \subset X$ è limitato se esiste $x_0 \in X$ ed esiste $R > 0$ tale che

$$K \subset B_R(x_0).$$

Prop Se $K \subset X$ è compatto allora è chiuso e limitato

Dim. Provo che $K = \overline{K}$.
$\subset$ sempre vero

Prendo $x \in \overline{K}$.
Allora esistono $x_n \in K$ $\forall n \in \mathbb{N}$ tali che

$$x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x$$

Siccome $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è dentro K che è compatto allora esiste sottosucc. che converge ad un punto limite che è contenuto in K. Quindi deve essere $x \in K$. Questo prova:

$$K = \overline{K}$$

Per Assurdo K non sia limitato. Quindi dato $x_0 \in X$ avremo

$$K \cap \left(X \setminus B_R(x_0) \right) \neq \emptyset$$

Quindi con $R = n$, trovo punti

$$x_n \in K \quad e \quad d(x_n, x_0) > n$$

$$\forall n \in \mathbb{N}$$

Siccome K è compatto esiste $(x_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ tale che

$$x_{n_j} \xrightarrow[j \to \infty]{} x$$

ORA

$$d(x_0, x) \geq \underbrace{d(x_{n_j}, x_0)}_{> n_j} - d(x_{n_j}, x)$$

$$d(x_{n_j}, x) \xrightarrow[j \to \infty]{} 0$$

Al limite trovo $n_j \to \infty$,

$$d(x_0, x) = +\infty.$$ Assurdo

$\square$

<u>Osservazione</u> In generale:

K chiuso $\not\Rightarrow$ K c…

$$\left.\begin{array}{l} K \text{ chiuso} \\ \text{e } K \text{ limitato} \end{array}\right\} \not\Longrightarrow K \text{ compatto}$$

Tuttavia

TEOREMA (Heine - Borel)

Sia $\overline{X = \mathbb{R}^m}$, $m \geq 1$, con la distanza standard. Allora sono equivalenti

A) K è compatto

$\Updownarrow$

B) K è chiuso e limitato.

Dim. A) $\Rightarrow$ B) Fatto sopra.

Dimostro che B) $\Rightarrow$ A).

Sia K chiuso e limitato.

Sia $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una succ. di p.ti in K.

$$x_n = (x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^m) \qquad n \in \mathbb{N}$$

La succ. reale $(x_n^1)_{n \in \mathbb{N}}$ è limitata in $\mathbb{R}$

Dalla Analisi 1:

$(x_n^1)_{n \in \mathbb{N}}$ ammette sottosuccessione convergente

$$x_{n_j}^1 \longrightarrow x_\infty^1 \in \mathbb{R}$$

Ora quando $(x_{n_j}^2)_{j \in \mathbb{N}}$ è limitata

quindi lei avrà una sotto-successione che converge ad un $x_\infty^2 \in \mathbb{R}$.

Ripeto la relazione di sottosucc. m-volte trovando una relazione di indici k_j tale che

$$x^i_{k_j} \xrightarrow[j\to\infty]{} x^i_\infty \in \mathbb{R} \quad \forall i=1,\dots,m$$

Ma allora

$$x_{k_j} \xrightarrow[j\to\infty]{} x_\infty = (x^1_\infty, \dots, x^m_\infty)$$

Quindi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha una sottosucc. che converge. Ma $K=\bar{K}$ chiuso e $x_n \in K$ e quindi $x_\infty \in \bar{K} = K$.

□

<u>TEOR</u> Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici e sia $f: X \to Y$ continua. Allora:

$$\underset{\text{compatto}}{K \subset X} \Longrightarrow \underset{\text{è compatto}}{f(K) \subset Y}$$

Dim. Sia $y_n \in f(K)$, $n \in \mathbb{N}$, una successione.
Avremo che esistono $x_n \in K$ tali che

$$f(x_n) = y_n$$

Ma K è compatto quindi esiste

$$(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}} \quad \text{t.c.} \quad x_{n_j} \xrightarrow[j\to\infty]{} x_\infty \in K.$$

Inoltre f è continua e quindi

f cont.:

$$f(x_{n_j}) \to f(x_\infty) \in f(K)$$

Inoltre f è continua e quindi

$$y_{n_j} = f(x_{n_j}) \xrightarrow[j \to \infty]{f \text{ cont.}} f(x_\infty) \in f(K)$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \uparrow$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad K \qquad\qquad \square$$

<u>TEOR 2</u> Sia (X, d) uno spazio metrico

interrotto