Lezione 26

lunedì 16 maggio 2016 12:32

ES $\quad A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^4+y^4+x^2-y^2<1\}$

i) A aperto

ii) A limitato

iii) $\overline{A}$ è compatto.

ii) Provo che A è limitato:

$$y^4 - y^2 \le x^4+y^4+x^2-y^2 < 1$$

Deve essere

$$y^4-y^2-1<0$$

Poniamo $y^2=t\ge0$.

$$t^2-t-1<0$$

$$t_\pm = \frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2} = \frac{1\pm\sqrt5}{2}$$

Nella t la disequazione

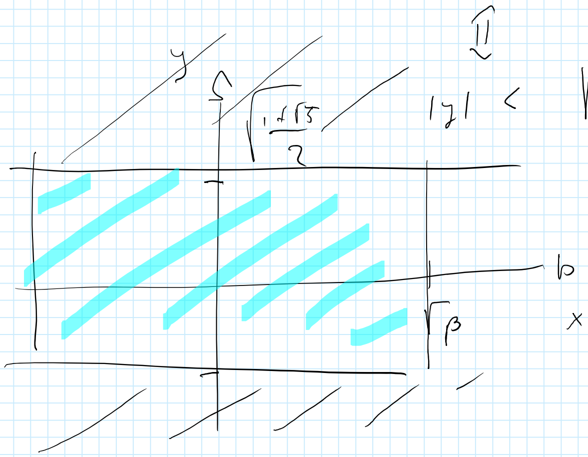
$$(0\le)\, t < \frac{1+\sqrt5}{2}$$

e dunque

$$y^2 < \frac{1+\sqrt5}{2}$$

$$\Updownarrow$$

$$|y| < \sqrt{\frac{1+\sqrt5}{2}}$$



Provo sulla x

$$x^2 \le x^4+x^2 < -(y^4-y^2)+1 =$$

$$= 1+y^2-y^4 \le 1+y^2+y^4$$

$$\le 1 + \frac{1+\sqrt5}{2} + \left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^2$$

$$\leq 1 + \underbrace{\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2}_{= \beta}$$

Dunque

$$|x| \leq \sqrt{\beta}$$

Quindi A è limitato

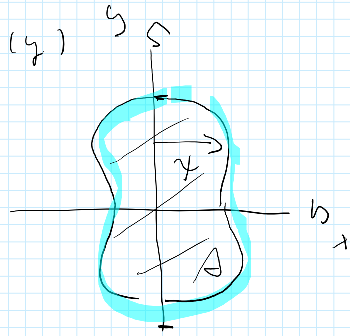
Compito per casa:

$$x^4 + x^2 < \underbrace{\boxed{1 + y^2 - y^4}}_{\text{formula}}$$

$$x^2 = s \quad \text{e risolvo}$$

e troverò

$$|x| < \varphi(y)$$



iii) $\overline{A}$ è compatto ?

$\overline{A}$ è chiuso

A limitato $\Rightarrow$ $\overline{A}$ è limitato

Dunque $\overline{A}$ è compatto

Punti di estremo di funzioni in più variabili

DEF $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme, $f: A \to \mathbb{R}$

i) $x_0 \in A$ si dice punto di minimo locale di $f: A \to \mathbb{R}$ se $\exists\, r > 0$ tale che

$$f(x) \geq f(x_0) \qquad \forall x \in A \cap B_r(x_0)$$

Se poi $f(x) > f(x_0)$ $\forall x \in A \cap B_r(x_0)$ $x \neq x_0$ diremo che il minimo è stretto.

ii) $x_0 \in A$ si dice p.to di max locale di f se $\exists\, r > 0$ tale che

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in A \cap B_r(x_0)$$

$$\left[(<) \longleftarrow x \neq x_0 \right]$$

"stretto"

DEF Ora sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto sia $x_0 \in A$ e sia $f \in C^1(A)$.
Diremo che x_0 è un p.to critico (stazionario) di f se $\nabla f(x_0) = 0$.

Lemma Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, sia $x_0 \in A$ e sia $f \in C^2(A)$. Allora $\forall x \in A$ tale che $[x_0, x] \subset A$ esiste $z \in [x_0, x]$ tale che

$$f(x) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle + \frac{1}{2} \langle Hf(z)(x - x_0), x - x_0 \rangle$$

Commento $z \mapsto Hf(z)$ è continua perché $f \in C^2(A)$.

Dunque

$$\langle Hf(z)(x-x_0), (x-x_0) \rangle =$$

$$= \langle Hf(x_0)(x-x_0), x-x_0 \rangle + \underbrace{\langle (Hf(z) - Hf(x_0))(x-x_0), (x-x_0) \rangle}$$

$x \to x_0 \Downarrow z \to x_0$

$$= \langle (x_0)(x-x_0), x-x_0 \rangle + o(|x-x_0|^2)$$

Dim. Definiamo $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$g(t) = f(x_0 + t(x - x_0))$$
$$= f(x_0 + tv) \qquad x - x_0 =: v$$

$$g(0) = f(x_0)$$
$$g(1) = f(x)$$

Poi $g \in C^2([0,1])$ ho lo sviluppo

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2} g''(\tau)$$

Esiste $\tau \in [0,1]$ che rende vero la formula sopra

Conti

$$g'(t) = \langle \nabla f(x_0 + tv), v \rangle$$
$$= \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(x_0 + tv) v_i$$
$$g'(0) = \langle \nabla f(x_0), v \rangle$$

Poi

$$g''(t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f_{x_i x_j}(x_0 + tv) v_i v_j$$
$$= \langle Hf(x_0 + tv) v, v \rangle$$

Ed ora con

$$z = x_0 + \tau v$$

avremo

$$f(x) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle + \frac{1}{2} \langle Hf(z)(x - x_0), x - x_0 \rangle$$

$\square$

DEF (Forme quadratiche (semi)definite)

Sia B una matrice reale $n \times n$ simmetrica

i) Diremo che B è semidefinita positiva se $\langle Bv, v \rangle \geq 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$.
Scriveremo in questo caso $B \geq 0$

ii) Diremo che B è definita positiva

se $\langle Bv, v\rangle > 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$
$v \neq 0$.
Scriveremo in questo caso $B > 0$.

Poi diremo che $B \leq 0 \iff -B \geq 0$
$B < 0 \iff -B > 0$.

Lemma Sia B una matrice reale simmetrica $n \times n$. Sono equivalenti queste due affermazioni:

① $B > 0$

② Esiste $m > 0$ ($m \in \mathbb{R}$) tale che
$$\langle Bv, v\rangle \geq m\,|v|^2 \qquad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

Dim ② $\Rightarrow$ ① Banale

① $\Rightarrow$ ②.
Consideriamo $K = \{v \in \mathbb{R}^n : |v| = 1\}$
È chiuso
È limitato $\Rightarrow$ K è compatto

Consideriamo poi $g : K \to \mathbb{R}$
$$g(v) = \langle Bv, v\rangle \in \mathbb{R} \quad \forall v$$
È continua.
Dunque
$$\min_{|v|=1} \langle Bv, v\rangle \overset{\exists}{=} \underbrace{\langle Bv_0, v_0\rangle}_{= m} > 0 \quad (v_0 \neq 0)$$
Ora abbiamo che
$$\langle Bv, v\rangle \geq m \quad \forall v \in K$$
Ma allora preso $v \in \mathbb{R}^n$ $v \neq 0$
$$\left\langle B\frac{v}{|v|}, \frac{v}{|v|}\right\rangle \geq m$$
$\parallel$

$$(Bv, v) \geq m |v|^2 \quad \forall v$$

D.

<u>Oss</u>. Se $B^{n\times n}$ è simmetrica reale allora ha n autovalori

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$$

e ci sarà una corr. base (per $\mathbb{R}^n$) di autovettori $v_1\, v_2 \dots v_n \in \mathbb{R}^n$

Possiamo supporre che $|v_i| = 1 \quad \forall i$

e che la base sia ortogonale:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \qquad \alpha_i \in \mathbb{R}$$

Allora

$$\boxed{(Bx, x)} = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j (\underbrace{Bv_i}_{\lambda_i v_i}, v_j)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j \lambda_i (v_i, v_j)$$

$$= \boxed{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \lambda_i}$$

Deduciamo che

- $B \geq 0 \iff \lambda_1 \geq 0$
- $B > 0 \iff \lambda_1 > 0$

<u>OSS</u> Supponiamo ora che B sia 2×2

Allora:

$$\det B = \lambda_1 \cdot \lambda_2$$
$$\operatorname{tr} B = \lambda_1 + \lambda_2$$

- $B \geq 0 \iff \det B \geq 0$ e $\operatorname{tr} B \geq 0$
- $B > 0 \iff \det B > 0 \quad \operatorname{tr} B \geq 0$

<u>TEOR 1</u> (Condiz. necessarie per la minimalità)

Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ <u>aperto</u>, $x_0 \in A$, $f \in C^2(A)$

Se x_0 è un p.to di minimo locale di f allora:

i) $\nabla f(x_0) = 0$ (CN 1° ordine)

ii) $Hf(x_0) \geq 0$ (CN 2° ordine)

Dim. $\exists\, r>0$ t.c. $B_r(x_0) \subset A$ aperto e sia $f(x) \geq f(x_0)$ $\forall x \in B_r(x_0)$

Pos.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\overbrace{f(x_0+te_i) - f(x_0)}^{\geq 0}}{t>0} \geq 0$$

$$= \lim_{t\to 0^-} \frac{\overbrace{\qquad}^{\geq 0}}{t<0} \leq 0$$

$$\Downarrow$$

$$\nabla f(x_0) = 0$$

ii) Formula per lo sviluppo di Taylor

$$f(x) = f(x_0) + \langle \cancel{\nabla f(x_0)}^{0}, x-x_0\rangle$$

$$z\in[x_0,x] \quad + \frac{1}{2}\langle Hf(z)(x-x_0), x-x_0\rangle$$

$x = x_0 + tv$

$|v| = 1$

$$0 \leq f(x_0+tv) - f(x_0) = \frac{t^2}{2}\langle Hf(\underset{z_t}{\underset{\shortparallel}{z}})v, v\rangle$$

$$\Downarrow$$

$$0 \leq \frac{1}{2}\langle Hf(z_t)v, v\rangle \quad \forall t$$

$z_t \xrightarrow{t\to 0} x_0$

Al limite $t\to 0$ trovo

$$0 \leq \langle Hf(x_0) v, v \rangle$$

$$\forall v \in \mathbb{R}^n.$$

$\square$

(Cond. suff. per la min locale)

TEOR 2 $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $x_0 \in A$, $f \in C^2(A)$.

Se sono verificate le 2 condizioni

① $\nabla f(x_0) = 0$

② $Hf(x_0) > 0$

allora x_0 è un p.to di minimo locale stretto.

Dim: Formula per lo sviluppo di Taylor:

$$f(x) = f(x_0) + \cancel{\langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle} + \frac{1}{2} \langle Hf(x_0)(x - x_0), x - x_0 \rangle + o(|x - x_0|^2)$$

Siccome $Hf(x_0) > 0$ esiste $m > 0$ tale che $\langle Hf(x_0) v, v \rangle \geq m |v|^2$

Allora

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2} \langle Hf(x_0)(x - x_0), x - x_0 \rangle + o(|x - x_0|^2)$$

$$\geq \frac{1}{2} m |x - x_0|^2 + o(|x - x_0|^2)$$

$$= \Big(\frac{1}{2} m + \underset{x \to x_0}{o(1)} \Big) |x - x_0|^2$$

$$\geq \frac{m}{4} |x - x_0|^2 > 0 \quad \forall x \in B_r(x_0)$$

$\exists\ r>0$ tale che
$$|o(1)| \leq \frac{m}{4} \qquad x \neq x_0$$
per $x \in B_r(x_0)$

$\Rightarrow$ x_0 p.to di minimo locale stretto. $\square$

Ricapitolazione

- x_0 p.to minimo $\Rightarrow$ $\nabla f(x_0) = 0$, $Hf(x_0) \geq 0$

- se però $\nabla f(x_0) = 0$, $Hf(x_0) > 0$ $\Rightarrow$ (minimo non) x_0 p.to di min. locale.