Convergenza Assoluta

Se dobbiamo studiare la convergenza di una serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

con termine generale a_n non positivo oppure $a_n \in \mathbb{C}$, la prima cosa da fare è studiare la convergenza assoluta.

DEF Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una succ. di numeri reali o complessi. Diciamo che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

converge assolutamente se converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| .$$

TEOR. (Criterio della Conv. Assoluta)
Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una succ. in $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.
Se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ conv. assolutamente allora la serie converge anche semplicemente ad somma in $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ e inoltre

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| .$$

Dim. 1° caso: $a_n \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Definiamo

$$a_n^+ = \max\{a_n, 0\} \geq 0$$
$$a_n^- = \min\{a_n, 0\} \leq 0$$

Proprietà

1) $a_n^+ \geq 0$, $a_n^- \leq 0$

2) $a_n^+ \leq |a_n|$, $-a_n^- \leq |a_n|$

3) $a_n^+ + a_n^- = a_n$

4) $a_n^+ - a_n^- = |a_n|$

Per confronto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \overset{\text{ipotesi}}{<} \infty$$

converge in $\mathbb{R}$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} -a_n^- \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$$

confronto

Concludo che

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k^+ + a_k^- = \sum_{k=1}^{n} a_k^+ + \boxed{\sum_{k=1}^{n} a_k^-}$$

convergono per $n \to \infty$

avendo somme parziali convergono ad un valore in $\mathbb{R}$

Deduco che

Poi

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right| \overset{\text{vero}}{\leq} \sum_{k=1}^{n} |a_n|$$

Passo al limite per $n \to \infty$

$$\underbrace{\lim_{n \to \infty} \left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right|}_{=} \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_n|$$

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_n \right|$$

Fine dim nel caso 1°

Caso 2°: $a_n \in \mathbb{C}$. Avremo

$$a_n = Re(a_n) + i\, Im(a_n)$$
$$= \alpha_n + i\, \beta_n$$
$$\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$$

osserviamo che

$$|\beta_n|, \quad |\alpha_n| \underset{|\beta_n|}{\overset{=}{\leq}} \sqrt{|\alpha_n|^2} \leq \sqrt{|\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2} = |a_n|$$

Deduciamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \overset{\text{ipotesi}}{<} \infty$$

$$\sum |\beta_n| \leq \qquad < \infty$$

Dunque $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ convergono in $\mathbb{R}$

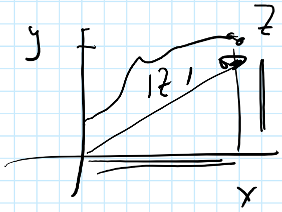
e quindi converge in $\mathbb{C}$ anche

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n + i\beta_n$$
$$c \qquad = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n + i \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n .$$

Mi fermo. $\square$

Richiamo. Se $z = x + iy \in \mathbb{C}$ definiamo

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



Allora

$$d(z, w) = |z - w|$$

dist. Euclidea fra z e w in $\mathbb{C}$.

Criterio di Leibniz

Si applica alle serie reali a segno alternante.
Sia $a_n \geq 0$ una succ. non negativa
La serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$$
Fattore alternante

si dice serie a segno alterno.

<u>Teorema</u> (Criterio di Leibniz)
Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale tale che:
(1) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente
(2) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (infinitesima) $\quad (\Rightarrow a_n \geq 0)$
Allora la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$
converge in $\mathbb{R}$.

<u>Lemma</u> Sia $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione tale che esistono finiti e siano uguali i due limiti
$$\lim_{n\to\infty} s_{2n} = \underset{\mathbb{R}}{\overset{}{L}} = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1}$$
$$L \in \mathbb{R}$$
Allora esiste anche
$$\lim_{n\to\infty} s_n = L.$$

Dim. Consideriamo le somme parziali pari e dispari
$$s_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k a_k$$
$$s_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^k a_k$$

Conti:

- $s_{2n+1} = s_{2n} \underbrace{- \overbrace{a_{2n+1}}^{\geq 0}}_{\leq 0} \leq s_{2n}$

- $s_{2n+1} = s_{2n-1} \underbrace{- a_{2n+1} + a_{2n}}_{\geq 0} \geq s_{2n-1}$

$a_{2n+1} \leq a_{2n}$ $(a_n) \downarrow$ ipotesi

$\Updownarrow$

$0 \leq a_{2n} - a_{2n+1}$

- Analogo $s_{2n+2} \leq s_{2n}$.

Conclusioni:

$\boxed{s_1} \leq s_3 \leq \dots \leq s_{2n+1} \leq s_{2n} \leq \dots \leq s_6 \leq s_4 \leq s_2$

Considerazioni

- $(s_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ cresce ed è sup. limitata.

$\Downarrow$

$\exists\, L_1 = \lim_{n \to \infty} s_{2n+1}$, $L_1 \in \mathbb{R}$

- $(s_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ decresce ed è infer. limitata.

$\Downarrow$

$\exists\, L_2 = \lim s_{2n}$

$$\exists\, L_2 = \lim_{n\to\infty} S_{2n}$$
$$\cap$$
$$\mathbb{R}$$

Infine:

$$L_1 - L_2 = \lim_{n\to\infty} S_{2n+1} - \lim_{n\to\infty} S_{2n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(S_{2n+1} - S_{2n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} (-1)^{2n+1} \underbrace{a_{2n+1}}_{\downarrow\, 0} = 0$$

ipotesi

$$\Rightarrow L_1 = L_2$$

Applico il lemma e concludo che esiste finito in $\mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n .$$

$\square$

Esempio Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

converge per il crit. Leibniz.

Infatti la succ. $a_n = 1/n$ verifica:

(1) È decrescente. ok

(2) È infinitesima $\lim \frac{1}{n} = 0$.

Attenzione però: questa serie NON converge assolutamente

$$\sum^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum^{\infty} \frac{1}{n} = \infty .$$

assolutamente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty .$$

Criterio del Confronto Asintotico

Si applica solo alla convergenza assoluta.

TEOR Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni reali o complesse. Supponiamo che $a_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ e supponiamo che esista finito e $\neq 0$ in $\mathbb{R}$ o in $\mathbb{C}$ il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} \overset{\text{Esiste}}{=} \underset{\mathbb{R},\,\mathbb{C}}{L} \neq 0 .$$

Allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge assolutamente se e solo se converge assolutamente $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Dim. Osservo che

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{b_n}{a_n} \right| = \left| \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} \right| \overset{\text{ipotesi}}{=} |L| > 0 .$$

Esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq \bar{n}$ si ha

$$\frac{|L|}{2} \leq \frac{|b_n|}{\underset{>0}{|a_n|}} \leq 2|L|$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{|L|}{2} |a_n| \leq |b_n| \leq 2|L| \cdot |a_n| \quad \forall n \geq \bar{n}$$

∞ $\qquad$ ∞ $\qquad$ ∞

$$\frac{|L|}{2}\sum_{n=\bar{n}}^{\infty} |a_n| \le \sum_{n=\bar{n}}^{\infty} |b_n| \le 2|L| \sum_{n=\bar{n}}^{\infty} |a_n|$$

Per confronto concludo il ragionamento □

Esempio: Il criterio del CA non si può usare per la conv. semplice.

Consideriamo

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \qquad n \geq 1$$

$$b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$$

Considerazioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \qquad \frac{1}{\sqrt{n}} \downarrow \text{ ok} \quad \to 0$$

Converge per Leibniz.

Poi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) = 1 \neq 0$$

Tuttavia

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\boxed{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - \frac{1}{n}\right) = -\infty$$