Lezione 30

venerdì 27 maggio 2016 08:35

ES 2

$$\omega = \frac{y}{x^2+y^2}\,dx - \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$$

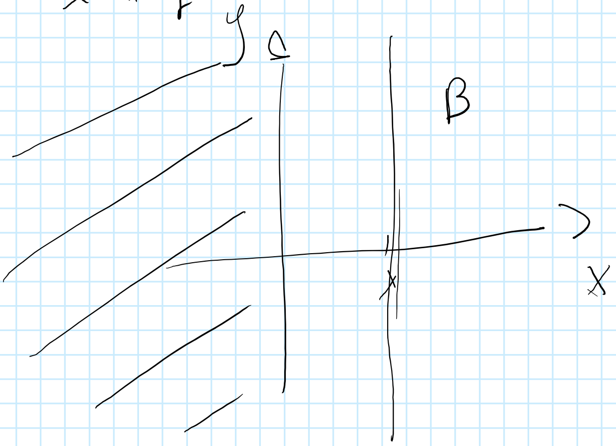
Calcolare un potenziale di ω su B.

Sol. Devo trovare $f \in C^1(B)$ tale che $df = \omega$ su B.

$$\Updownarrow$$

$$\longrightarrow \begin{cases} f_x = \dfrac{y}{x^2+y^2} & \text{su } B \quad \leftarrow \\ f_y = -\dfrac{x}{x^2+y^2} & \text{su } B \end{cases}$$

Integro la 2^ eq. in y



$$\int f_y(x,y)\,dy = \int \frac{-x}{x^2+y^2}\,dy$$

Trovo

$$f(x,y) = -x \int \frac{1}{x^2+y^2}\,dy$$

$$= -\frac{1}{x}\int \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\,dy$$

$$= -\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)\right] + C(x)$$

Dunque

$$f(x,y) = -\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + C(x)$$

Inserisco nella $1^\wedge$ equazione:

$$-\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right) + C'(x) = \frac{+y}{x^2+y^2}$$

$$\cancel{\frac{y}{x^2+y^2}} + C'(x) = \cancel{\frac{y}{x^2+y^2}}$$

$$C'(x) = 0 \quad , \quad x > 0$$

$$\Downarrow$$

$$C = C_0 \in \mathbb{R}$$

Dunque i potenziali di ω sono

$$f(x,y) = -\arctan\left(\frac{y}{x}\right) + c_0$$

$c_0 \in \mathbb{R}$

$\forall y \in \mathbb{R}$

$\forall x > 0$ $\square$

ES 3 Sia $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y > 0 \}$ e sia $\omega \in \Omega^1(A)$ la 1-forma di A:

$$\omega = (2x+y)\log(x+y)\,dx + x\left(1+\log(x+y)\right)dy .$$

i) Provare che ω è chiusa in A

ii) " " ω è esatta in A

iii) Calcolare un potenziale di ω in A

iv) Sia $\gamma : [0,\pi/2] \to \mathbb{R}^2$ la curva $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$. Calcolare

$$\int_\gamma \omega$$

Soluzione (i) Conti:

$$\frac{\partial}{\partial y}(2x+y)\log(x+y) = \log(x+y) + (2x+y)\frac{1}{\ldots}$$

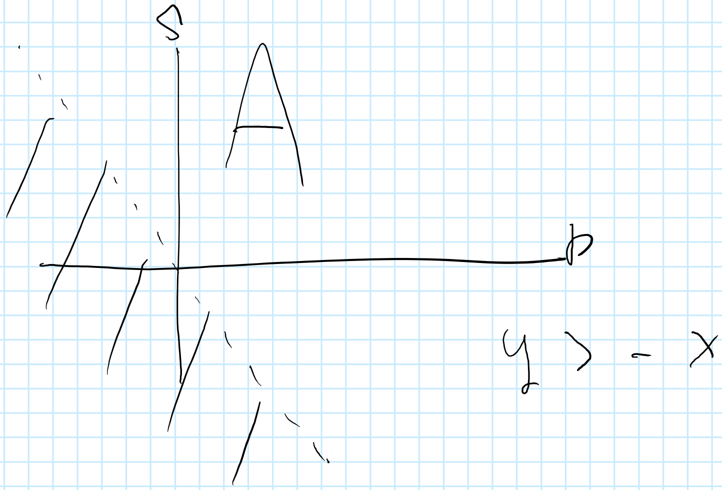
$$= \quad x+y$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\, x\,(1+\log(x+y)) = 1 + \log(x+y) + x\,\frac{1}{x+y}$$

$$= \frac{2x+y}{x+y} + \log(x+y)$$

$\Rightarrow$ ω è chiusa

ii) A è convesso $\Rightarrow$ contraibile



ω è chiusa in A

$\Downarrow$ T. Poincaré

ω è esatta in A

iii) cerco $f \in C^1(A)$ tale che $df = \omega$

$$\rightarrow \begin{cases} f_x = (2x+y)\log(x+y) \\ f_y = x\,(1+\log(x+y)) \end{cases} \quad \text{in } A$$

Integro la 2^ equazione in y con integrali indefiniti:

$$f(x,y) = \int x\,(1+\log(x+y))\,dy$$

$$= x\left[\, y + \int \left(\frac{\partial}{\partial y}(x+y)\right) \underline{\log(x+y)}\, dy \right]$$

$$= xy + x\left[(x+y)\log(x+y) - \int \cancel{(x+y)}\,\frac{1}{\cancel{x+y}}\,dy \right]$$

$$= \cancel{xy} + x(x+y)\log(x+y) - \cancel{xy} + C(x)$$

Ricopio:

$$f(x,y) = (x^2+xy)\log(x+y) + C(x)$$

Derivo in x e sostituisco nella 1^ Eq.

$$f_x = (2x+y)\log(x+y) + \underline{(x^2+xy)}\,\frac{1}{x+y} + c'(x) \ldots$$

$$\underline{\cancel{(2x+y)\log(x+y)} + x + c'(x)} = \underline{\cancel{(2x+y)\log(x+y)}}$$

$$x + c'(x) = 0$$

$$c'(x) = -x$$

$$c(x) = -\frac{x^2}{2} + c_0$$

$c_0 \in \mathbb{R}$

Dunque i potenziali

$$f(x,y) = \underline{(x^2+xy)}\log\underbrace{(x+y)}_{\text{Dimostrare}} - \frac{x^2}{2}\ (+\ c_0)$$

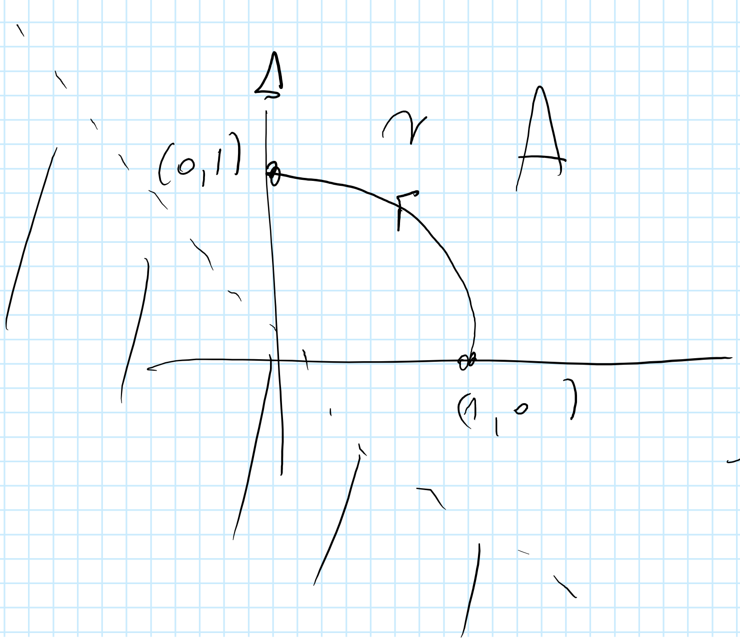
$$\underline{\underline{\text{ES}}} \quad \left.\begin{array}{l} A \text{ connesso} \\ f,g \text{ due potenziali di } \omega \end{array}\right\} \overset{\text{che}}{\Longrightarrow} f-g = \text{costante}$$

(iv) Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \omega \overset{\text{potenziale}}{=} f(\gamma(\tfrac{\pi}{2})) - f(\gamma(0))$

$$\gamma : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}^2$$

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$

Osservo che $\gamma([0,\pi/2]) \subset A$ dove ω è esatta con potenziale f



$$\gamma(0) = (1,0)$$

$$\gamma(\pi/2) = (0,1)$$

$$f(0,1) = 0$$

$$f(1,0) = -\frac{1}{2}$$

$$f(1,0) = -\frac{1}{2}$$

$$\int_\gamma \omega = f(0,1) - f(1,0) = \frac{1}{2}$$

Spazi metrici completi

(X, d) spazio metrico

DEF Una succ. di punti $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X si dice di Cauchy se

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \ \forall n \geq \bar{n}$ vale $d(x_{n+k}, x_n) \leq \varepsilon$ $\forall k \geq 0$.

DEF Uno spazio metrico (X, d) si dice completo se ogni successione di Cauchy in X converge ad un elemento di X.

ESEMPI

- $\mathbb{R}$ con $d(x,y) = |x-y|$ sono uno spazio metrico completo.
- $\mathbb{R}^n$ con d = dist. sono uno sp. metrico completo
- $X = C([0,1]; \mathbb{R})$ con la

la dist.

$$d(f,g) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)| = \|f - g\|_\infty$$

Bene, (X, d) è uno spazio metrico completo.

DEF Una funzione $T : X \to X$ si dice contrazione se esiste $0 \leq \lambda < 1$ tale che

$$d(T(x), T(y)) \leq \lambda\, d(x,y)$$

TEOR. Sia (X, d) uno SM completo e sia $T : X \to X$ una contrazione.

Allora esiste un unico punto $x \in X$ tale che $T(x) = x$ (p.to fisso di T).