Lezione 5

martedì 15 marzo 2016 12:26

Tutorato

Ma 16:30 - 18:15 AULA B

Me 16:30 - 18:15

Davide Colletto

Integrali di Riemann generalizzati

- Integrazione su intervalli non limitati
- di non limitate

Dato $[a,b] \subset \mathbb{R}$ intervallo chiuso e limitato indichiamo con $R([a,b])$ l'insieme di tutte le funzioni limitate e R-integrabili su $[a,b]$.

(1) **DEF** Siano $a \in \mathbb{R}$ ed $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $f \in R([a,b])$ $\forall\, b \geq a$. Diciamo che f è integr. in senso generalizzato su (a,∞) se esiste finito il seguente limite

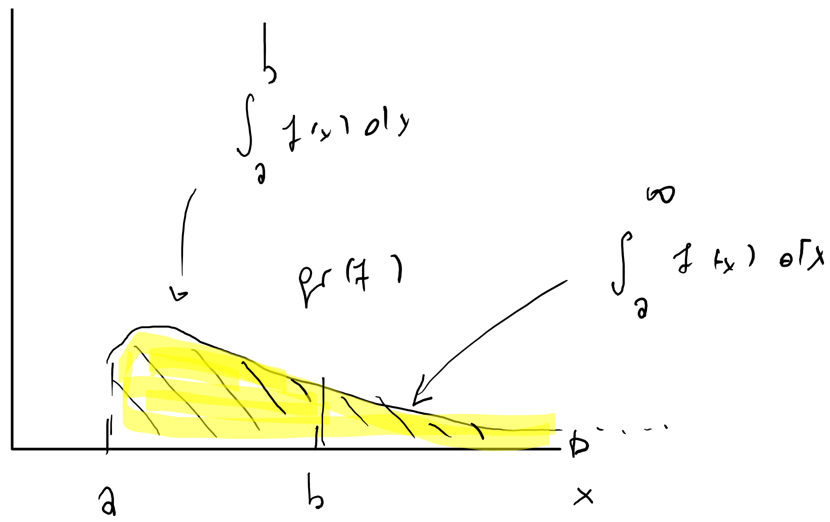
$$I = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\,dx \in \mathbb{R}$$

e allora porremo

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = I = \lim_{b\to\infty} \ldots .$$

Se poi fosse $I = \pm\infty$ allora diremo che l'integrale improprio diverge a $\pm\infty$ e porremo

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \pm\infty .$$



ESEMPIO Fisso $\alpha > 0$ e considero

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

Fisso $b > 1$ e calcolo

$$I(b) = \int_1^b \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \int_1^b x^{-\alpha}\,dx$$

se $\alpha \neq 1$

$$= \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_{x=1}^{x=b}$$

$$= \frac{1}{1-\alpha}\left[b^{1-\alpha} - 1\right]$$

Faccio il limite

$$\lim_{b\to\infty} I(b) = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{1-\alpha}\left[b^{1-\alpha} - 1\right]$$

$$= \begin{cases} +\infty & \alpha < 1 \\ \frac{1}{\alpha - 1} > 0 & \alpha > 1 \end{cases}$$

Se $\alpha = 1$

$$\int_1^b \frac{1}{x}\,dx = \left[\log x\right]_{x=1}^{x=b} = \log b \xrightarrow{b \to \infty} +\infty$$

Conclusione

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \quad \text{converge} \iff \alpha > 1$$

$$= \frac{1}{\alpha - 1}$$

② Integrali di funzioni non limitate.

DEF Siano $-\infty < a < b < \infty$ e $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $f \in R([a+\varepsilon, b])$ $\forall \varepsilon > 0$. Allora diciamo che f è integrabile in senso generaliz. su $(a, b]$ se esiste finito il

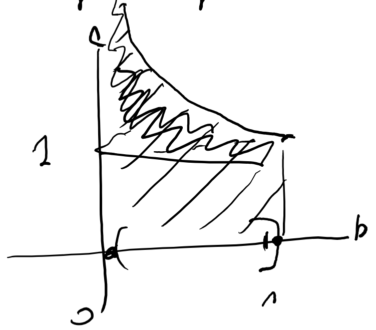
$$I = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx \in \mathbb{R}$$

e poniamo

$$\int_a^b f(x)\,dx = I.$$

ESEMPIO Dato $\alpha > 0$ consideriamo l'integr. generalizzato del 2° tipo

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$



Trasformo questo integrale in un integrale del 1° tipo un integrale del 1° tipo

Sostituzione $\frac{1}{x} = y \iff x = \frac{1}{y}$

da cui $dx = -\frac{1}{y^2}\,dy$

$$x = 1 \to y = 1$$
$$x = 0 \to y = \infty$$
$$(x \to 0^+) \to (y \to +\infty)$$

Quindi

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \int_{+\infty}^1 y^\alpha \left(-\frac{1}{y^2}\right) dy$$

$$= \int_1^\infty \frac{1}{y^{2-\alpha}}\,dy < \infty$$

$\Updownarrow$ visto sopra

$$2 - \alpha > 1$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\alpha < 1}$$

Criteri del Confronto

Confronto standard

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq g(x) \leq f(x) \\ \text{su } [1, \infty) \\ \int_1^\infty f(x)\,dx < \infty \end{array}\right\} \Rightarrow \int_1^\infty g(x)\,dx < \infty$$

TEOR (Criterio del Confronto Asintotico)

Siano $f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$,
due funzioni tali che $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ $\forall b \geq a$

due funzioni tali che $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$ $\forall\, b \geq a$.
Supponiamo che $g(x) > 0$ $\forall\, x \geq a$ e che esista finito e $\neq 0$ il seguente limite

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0 .$$

$$L \in \mathbb{R}$$

Allora l'integrale $\int_a^\infty f(x)\,dx$ converge se e solo se converge l'integr. $\int_a^\infty g(x)\,dx$.

Dim. Dalla def. di limite: $\exists\, \bar{x} > a$ tale che $\forall\, x \geq \bar{x}$

$$\frac{L}{2} \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq 2L$$

perché $L \neq 0$ ed ad esempio $L > 0$.

$$\Downarrow$$

$$\frac{L}{2} g(x) \leq \boxed{f(x)} \leq 2L\, g(x) \quad \forall\, x \geq \bar{x} .$$

Integro $[\bar{x}, \infty)$ e trovo la tesi.

$\square$

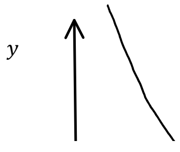
Confronto tra serie ed integrali

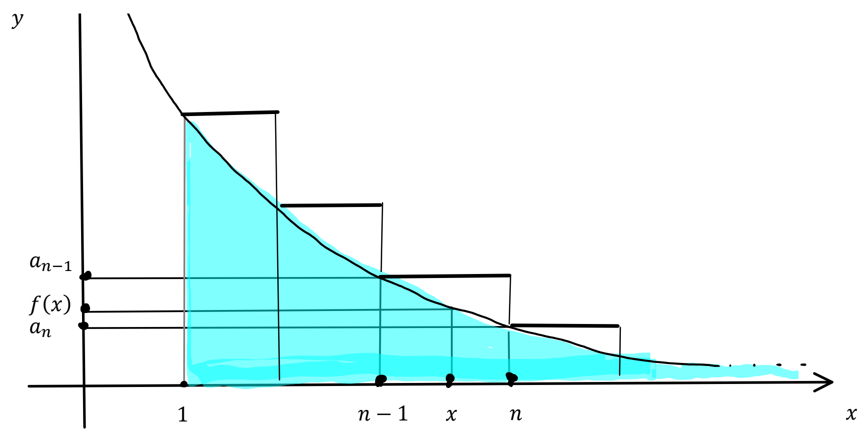
Sia $f : (0, \infty) \to [0, \infty)$ una funzione non negativa e decrescente. Definiamo quindi la successione numerica

$$a_n = f(n) \qquad n \in \mathbb{N} .$$

Se ora prendo un punto $x \in (n-1, n]$ allora avremo le seguenti disug.:

$$a_n = f(n) \leq f(x) \leq f(n-1) = a_{n-1}$$





Integro su $(n-1, n]$

$$a_n = \int_{n-1}^{n} a_n \, dx \le \int_{n-1}^{n} f(x)\,dx \le \int_{n-1}^{n} a_{n-1}\,dx = a_{n-1}$$

È vero $\forall n$. Prendo le somme

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n \le \boxed{\sum_{n=2}^{\infty} \int_{n-1}^{n} f(x)\,dx} \le \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \int_{n-1}^{n} f(x)\,dx = \int_1^{\infty} f(x)\,dx \qquad\qquad \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} = \sum^{\infty}$$

TEOR Nelle ipotesi precedenti (f positiva e decrescente) si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \iff \int_1^{\infty} f(x)\,dx\,dx < \infty$$

Dim. Segue dalle dis. precedenti.

ES 1 Avremo che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} < \infty \text{ se e solo se } \alpha > 1$$

Infatti $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx < \infty$ e solo se $\alpha > 1$.

$f(x) = \frac{1}{\ }$ positiva

x^α p...

decrescente

ES 2 Voglio studiare la seguente serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^\alpha}$$

con $\alpha > 0$ parametro da discutere.

Studio la serie con il criterio del confronto integrale per il quale la serie converge se e solo se converge l'integr.

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\log x)^\alpha}\, dx .$$

Osservo che $f(x) = \frac{1}{x(\log x)^\alpha}$ è

non negativa e decrescente.

Conti

$$I(b) = \int_2^b \frac{1}{x} (\log x)^{-\alpha}\, dx = \left[\frac{(\log x)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_{x=2}^{x=b} =$$

$\alpha \neq 1$

$$= \frac{1}{1-\alpha} \left((\log b)^{1-\alpha} - (\log 2)^{1-\alpha} \right)$$

Quindi

$$\lim_{b \to \infty} I(b) = \begin{cases} +\infty & 1-\alpha > 0 \\ \frac{(\log 2)^{1-\alpha}}{\alpha - 1} & \alpha > 1 \end{cases}$$

Conclusione:

Integrale converge $\iff \alpha > 1$

E quindi

Serie converge $\iff \alpha > 1$.

<u>Convergenza Assoluta</u>

Diciamo che l'integr. improprio

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

converge assolutamente se converge l'integr.

$$\int_a^\infty |f(x)|\,dx .$$

<u>TEOR</u> Se $\int_a^\infty f(x)\,dx$ converge assolutamente allora converge anche semplicemente e inoltre

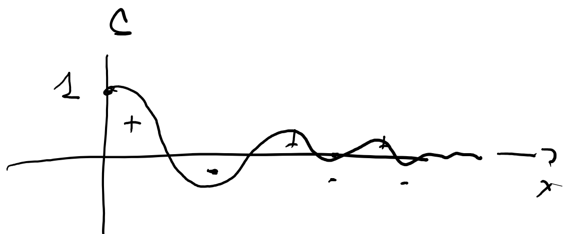
$$\left| \int_a^\infty f(x)\,dx \right| \leq \int_a^\infty |f(x)|\,dx .$$

Dim. Come per serie.

<u>ESEMPIO</u> Verifichiamo che l'integrale improprio

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$$

<u>NON</u> converge assolutamente.



Verifico che

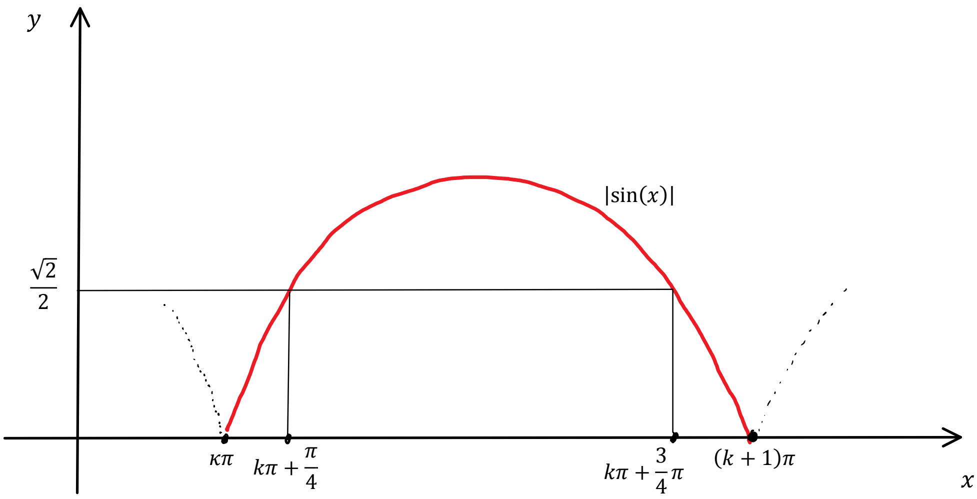
$$\int^\infty \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = +\infty .$$

Verifico che

$$\int_0^{\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = +\infty .$$

Farò un confronto con una serie divergente.
Guardo l'intervallo

$$[k\pi, (k+1)\pi] \qquad k \in \mathbb{N}$$



In

$$\underline{\underline{\left[k\pi + \frac{\pi}{4}, (k+1)\pi - \frac{\pi}{4}\right]}} \quad \text{avremo} \quad |\sin x| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

e inoltre

$$\frac{1}{x} \geq \left(k\pi + \pi - \pi/4\right)^{-1} = \left(k\pi + \frac{3}{4}\pi\right)^{-1}$$

se $x \in$ quell'intervallo

Allora

$$\int_0^{\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \geq$$

$$\geq \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k\pi+\pi/4}^{(k+1)\pi-\pi/4} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \geq$$

$$\geq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{\dots}^{\dots} \frac{1}{k\pi + \frac{3}{4}\pi} dx$$

$\infty \quad \pi \quad 1$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\pi}{2} \frac{1}{k\pi + \frac{3}{4}\pi} =$$

CA con $\sum \frac{1}{k}$

$$= \frac{\sqrt{2}\,\pi}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k\pi + \frac{3}{4}\pi} = \infty$$

$\square$