Lezione 7

martedì 22 marzo 2016 12:35

ES 1 Verificare che $f(x) = \dfrac{\sin x \log x}{x^2}$ ha int. improprio ass. conv. sulla semiretta $[1, \infty)$.

Soluzione. Devo verificare che

$$\int_1^{\infty} \left| \frac{\sin x \log x}{x^2} \right| dx < \infty$$

Uso $|\sin x| \leq 1$. Poi osservo

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}} = 0$$

Quindi esiste una costante $C > 0$ finita tale che

$$\frac{\log x}{\sqrt{x}} \leq C$$
$$\Updownarrow$$
$$\log x \leq C \sqrt{x} \qquad \forall x \geq 1.$$

Uso il Crit. del Confronto:

$$0 \leq \frac{|\sin x| \log x}{x^2} \leq \frac{C\sqrt{x}}{x^2} = \frac{C}{x^{3/2}}$$

e quindi

$$\int_1^{\infty} \frac{|\sin x| \log x}{x^2} dx \leq C \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}} dx < \infty$$

perché $\frac{3}{2} > 1$

$\square$

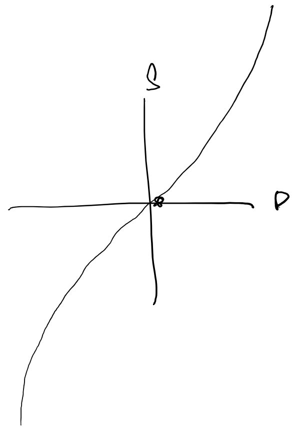
ES. 2 Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ studiare la c... ... dell'integr. gener.

ES. 2 Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ studiare la convergenza dell'integr. gener.

$$I_\alpha = \int_0^\infty \frac{x \operatorname{arctg}(x^\alpha)}{\sinh(x^2)}\, dx$$

Soluz. Ricordo che

$$\sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$



Studio la conv. nell'inter. $(0,1]$

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}(x^\alpha)}{\sinh(x^2)}\, dx$$

Cerco di fare confronti asintotici.

$$\sinh(t) = t + o(t) \qquad t \to 0$$

$$\sinh(x^2) = x^2(1+o(1)) \qquad \alpha > 0,\ x \to 0$$

1° caso: $\alpha > 0$ $\quad \operatorname{arctg}(x^\alpha) = x^\alpha + o(x^\alpha) = x^\alpha(1+o(1))$

$$\operatorname{arctg} t = t + o(t) \qquad t \to 0$$

Dunque

$$\frac{x \operatorname{arctg}(x^\alpha)}{\sinh(x^2)} = \frac{x \cdot x^\alpha (1+o(1))}{x^2(1+o(1))} = \boxed{\frac{1}{x^{1-\alpha}}} \cdot (1+o(1))$$

Per il CCA l'integr. converge se e solo se

Deve convergere $\int_0^1 \frac{1}{x^{1-\alpha}}\, dx$ $\quad 1-\alpha < 1 \iff \alpha > 0$

Concl. $\forall \alpha > 0$ $\int_0^1 \text{—}\, dx$ converge.

Concl. $\forall \alpha > 0$ $\int_0^1 \text{——} \, dx$ converge.

2° caso $\alpha \leq 0$ in questo caso

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{arctg}(x^\alpha) = \begin{cases} \pi/4 & \alpha = 0 \\ \pi/2 & \alpha < 0 \end{cases}$$

$\pi/4$

Dunque

$$\frac{x \operatorname{arctg}(x^\alpha)}{\sinh(x^2)} = \frac{x \, \frac{\pi}{2}(1+o(1))}{x^2(1+o(1))}$$

$$= \frac{\pi}{2} \, \frac{1}{x} \, (1+o(1))$$

Quindi per il CCA $\int_0^1 \frac{x \operatorname{arctg} x^\alpha}{\sinh x^2} dx = +\infty$ diverge $\forall \alpha \leq 0$

Adesso passo a studiare

$$\int_1^\infty \frac{x \operatorname{arctg}(x^\alpha)}{\sinh(x^2)} \, dx$$

So che $\forall p > 0$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sinh(x^2)}{x^p} = +\infty$$

Quindi esiste $C = C_p > 0$ finito tale che

$$\frac{\sinh(x^2)}{x^p} \geq C_p > 0 \quad \forall x \geq 1$$

ovvero

$$\frac{1}{\sinh(x^2)} \leq \frac{1}{C_p} \frac{1}{x^p}$$

$$\sinh(x^2) \geq C_p \, x^p$$

$\forall x \geq 1$

E quindi

$$0 \leq \frac{x \arctg(x^2)}{\sinh(x^2)} \leq \frac{x \frac{\pi}{2}}{C_p x^p} = \frac{\pi}{2C_p} \frac{1}{x^{p-1}}$$

Con la scelta $p = 3$ trovo

$$\int_1^\infty \frac{x \arctg(x^2)}{\sinh(x^2)} dx \leq \frac{\pi}{2C_3} \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx < \infty$$

Per confronto questo integrale converge $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

Conclusione: Tutto l'integr. converge

$$\Updownarrow$$

$$\alpha > 0.$$

ES. 3 Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ studiare la convergenza semplice e assoluta dell'integr.

$$I_\alpha = \int_1^\infty x \sin(x^\alpha) \, dx.$$

Sol. Studio la conv. semplice quando $\alpha > 0$.

Devo vedere se esiste finito il

$$\lim_{b \to \infty} \int_1^b x \sin(x^\alpha) \, dx$$

Faccio il cambio di variabile

$$x^\alpha = y \iff x = y^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$\frac{1}{\alpha} - 1$$

$x^{\alpha} = y \iff x = y$

$\to \quad dx = \frac{1}{\alpha} \, y^{\frac{1}{\alpha} - 1} \, dy$

$x = 1 \to y = 1$

$x = \infty \to y = \infty$ $\qquad \alpha > 0$

Dunque trovo il nuovo integrale

$$\int_1^{\infty} x \sin(x^{\alpha}) \, dx = \int^{\infty} y^{\frac{1}{\alpha}} \sin(y) \, \frac{1}{\alpha} \, y^{\frac{1}{\alpha} - 1} \, dy$$

$$= \frac{1}{\alpha} \int_1^{\infty} \underbrace{\frac{1}{y^{1 - 2/\alpha}}}_{= f(y)} \boxed{\sin(y)} \, dy$$

{ ok ho primitiva ~~X~~ limitata

Invece del crit. Abel

① $\lim_{y \to \infty} f(y) = \lim_{y \to \infty} \frac{1}{y^{1 - 2/\alpha}} = 0$

sì se $1 - \frac{2}{\alpha} > 0$

② f è decrescente? sì se $\alpha > 2$ $\qquad \boxed{\alpha > 2}$

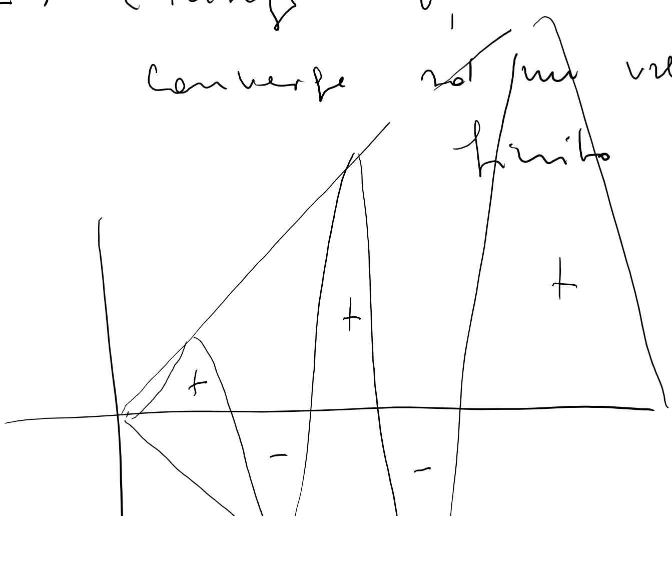
Concludo che:

$\alpha > 2 \implies$ l'integrale $\int_1^{\infty} x \sin(x^{\alpha}) \, dx$ converge ~~ad~~ a un valore finito

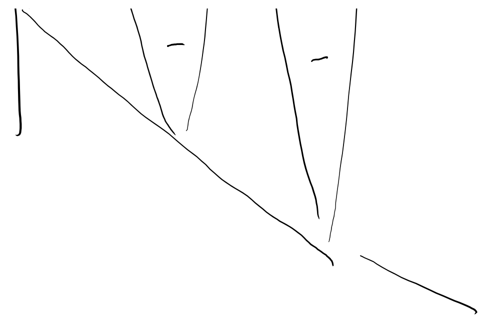
Se poi $\alpha = 2$

$\downarrow$

$\sin(y) \, dy$



NON



Infatti il limite

$$\lim_{b\to\infty}\int_1^b \sin(y)\,dy = \lim_{b\to\infty}\Big[-\cos(y)\Big]_{y=1}^{y=b}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \cos(1)-\cos(b) \quad ?$$

CURVE in $\mathbb{R}^n$

$n\in\mathbb{N}$, $n\geq 1$. Tipicamente $n=2$, $n=3$

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\dots\times\mathbb{R}}_{n \text{ volte}}$$

I punti di $\mathbb{R}^n$ li indichiamo in questo modo

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

con $x_1, x_2 \dots x_n$ coordinate di x

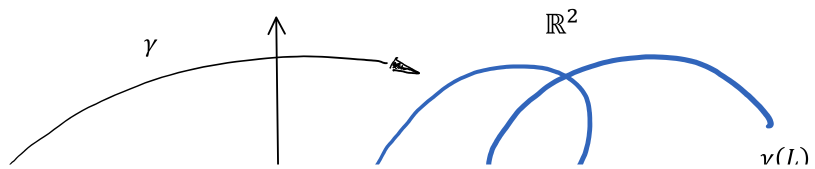
Fissiamo intervallo $[0,L]\subset\mathbb{R}$, $L>0$.

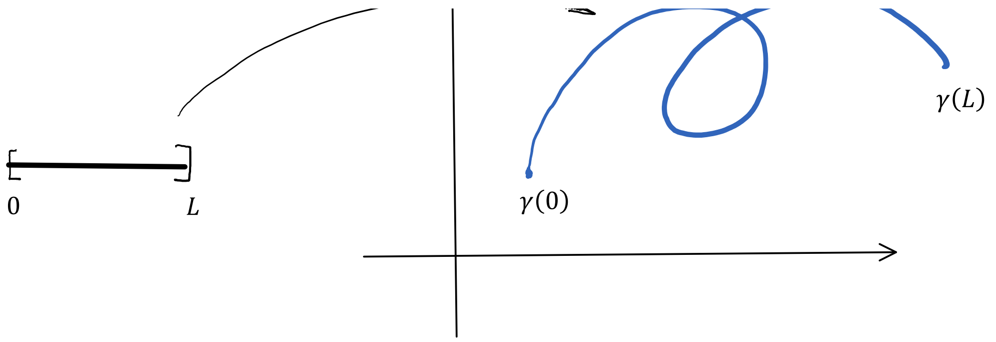
DEF Una curva in $\mathbb{R}^n$ è una funzione continua $\gamma:[0,L]\to\mathbb{R}^n$.

Diremo che

- γ è una curva chiusa se $\gamma(0)=\gamma(L)$
- γ è semplice (iniettiva) se $s,t\in[0,L)$ con $s\neq t \Rightarrow \gamma(s)\neq\gamma(t)$
- l'~~immagine~~ $= \gamma([0,L]) = \{\gamma(t)\in\mathbb{R}^n : t\in[0,L]\}$

si chiama supporto o sostegno della curva.





Commento

Sia ora $\varphi : [0,M] \to [0,L]$ una funzione continua iniettiva e suriettiva.
Chiameremo φ "cambiamento di parametro".

Consideriamo la nuova curva $x : [0,M] \to \mathbb{R}^n$

$$x(t) = \gamma(\varphi(t)), \quad t \in [0,M]$$

$$x = \gamma \circ \varphi$$

x è una curva, e si dice "riparametrizzazione" di γ.

Osserviamo che

$$spt(x) = spt(\gamma).$$

Il supporto è lo stesso.
Dunque una curva è data da:

① un supporto

② una parametrizzazione del supporto.

Diremo che il cambio di parametro φ conserva l'orientazione se $\varphi(0) = 0$

$$\varphi(M) = L$$

Diremo invece che φ inverte l'orientazione se $\varphi(0) = L$ e $\varphi(M) = 0$.

Ora consideriamo una curva $\gamma \in C^1([0,L];\mathbb{R}^n)$ ovvero $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ con $\gamma_1 \dots \gamma_n$ funzioni derivabili con continuità.

Allora il vettore

$$\dot{\gamma}(t) = (\dot{\gamma}_1(t), \dot{\gamma}_2(t), \dots, \dot{\gamma}_n(t))$$

si dice "velocità" della curva all'istante $t \in [0,L]$.

Abbiamo

$$\dot{\gamma}(t) = \lim_{\delta \to 0} \frac{\gamma(t+\delta) - \gamma(t)}{\delta}$$