Lezione 8

venerdì 1 aprile 2016 08:42

Sia $\gamma : [a, L] \to \mathbb{R}^n$ una curva derivabile.

Sia $|x| = |(x_1, x_2, \dots, x_n)| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$

la norma del punto $x \in \mathbb{R}^n$.

Se γ è derivabile avremo la lunghezza della derivata

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \dots + \gamma_n'(t)^2}$$

DEF Una curva $\gamma \in C^1([0,L]; \mathbb{R}^n)$ derivabile con cont. si dice regolare se $|\gamma'(t)| \neq 0 \ \forall t \in [0,L]$.
In questo caso possiamo definire il vettore tangente unitario alla curva nel punto $\gamma(t)$

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}, \qquad t \in [0, L].$$

Commenti: la derivata $\gamma'(t)$ di una curva regolare contiene 3 informazioni

① Direzione tangente.

② $|\gamma'(t)|$ mi dà la velocità istantanea cui la curva sta passando nel punto $\gamma(t)$, al tempo t

③ Una "verso" orientazione, un segno di T.

Osserv. Il vettore T non dipende dalla parametrizzazione (a meno del segno)

Esempi di curve non regolari

① Consideriamo $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = (t^3, t^2), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

velocità

$$\gamma'(t) = (3t^2, 2t)$$

$$\gamma'(t) = (0,0) \iff \begin{cases} 3t^2 = 0 \\ , \end{cases} \iff t = 0$$

$$\dot\gamma(t) = (0,0) \iff \begin{cases} 3t^2 = 0 \\ 2t = 0 \end{cases} \iff t = 0$$

In $t=0$ la curva non è regolare.

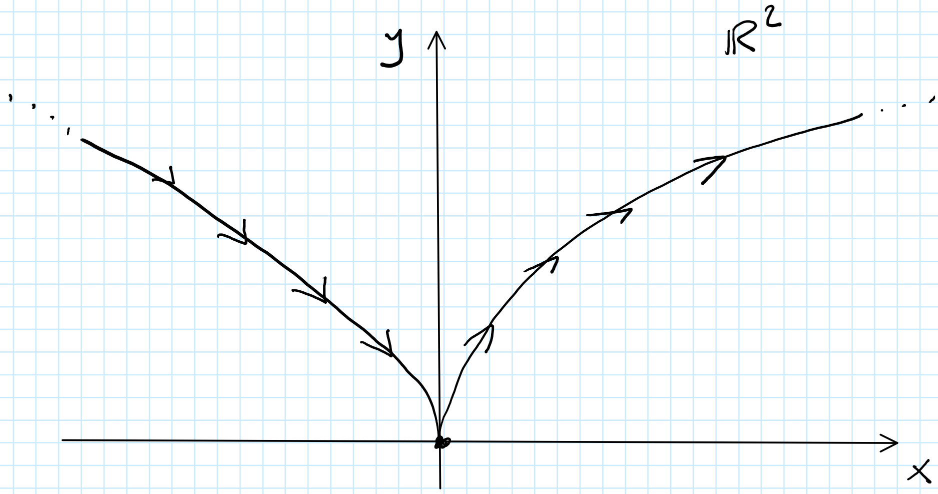
Ponendo $x = t^3 \iff t = \sqrt[3]{x}$ troviamo

$$t^2 = x^{2/3}$$

Quindi abbiamo la riparametrizzazione di γ

$$\tilde\gamma(x) = (x, \overbrace{x^{2/3}}^{f(x)}) \qquad x \in \mathbb{R}$$

Quindi $spt(\gamma) = gr(f) \subset \mathbb{R}^2$



In $(0,0)$ il $spt(\gamma)$ ha una cuspide.

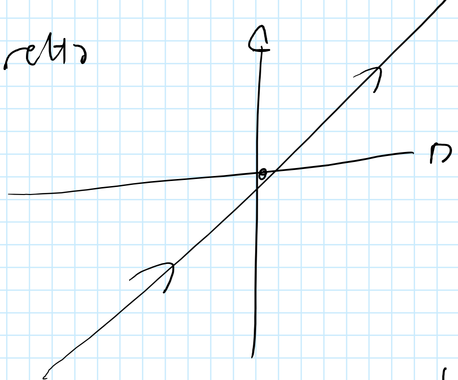
2) Sia $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = (t^3, t^3)$$

$$\dot\gamma(t) = (3t^2, 3t^2)$$ curva non reg. in $t=0$

$$\dot\gamma(0) = (0,0)$$

Ma è una retta



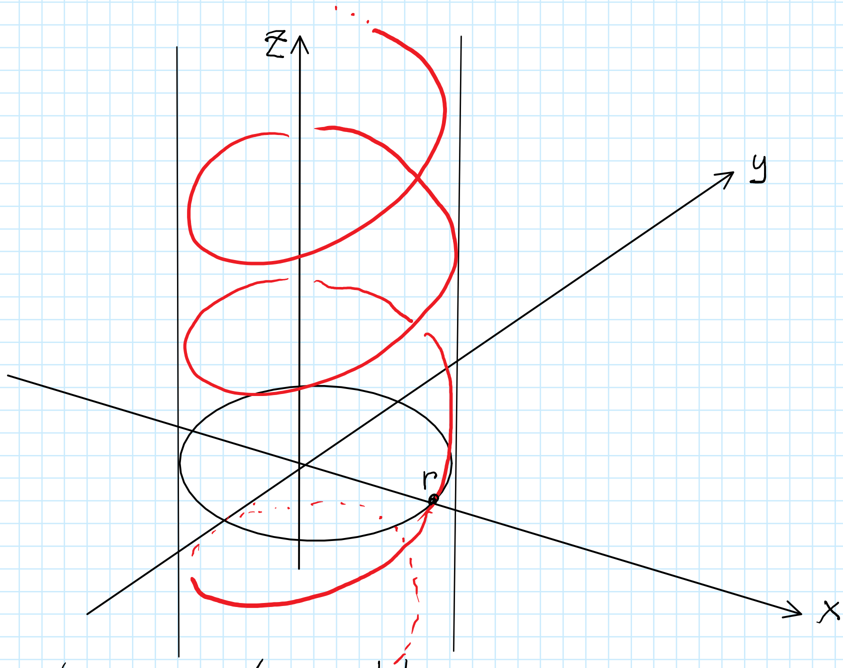
Alcuni Esempi di curve elementari

(1) Elica cilindrica

Fisso $r > 0$, $v \in \mathbb{R}$.

Considero $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$$\gamma(t) = (r\cos t \quad r\sin t, \; vt) \qquad t \in \mathbb{R}$$



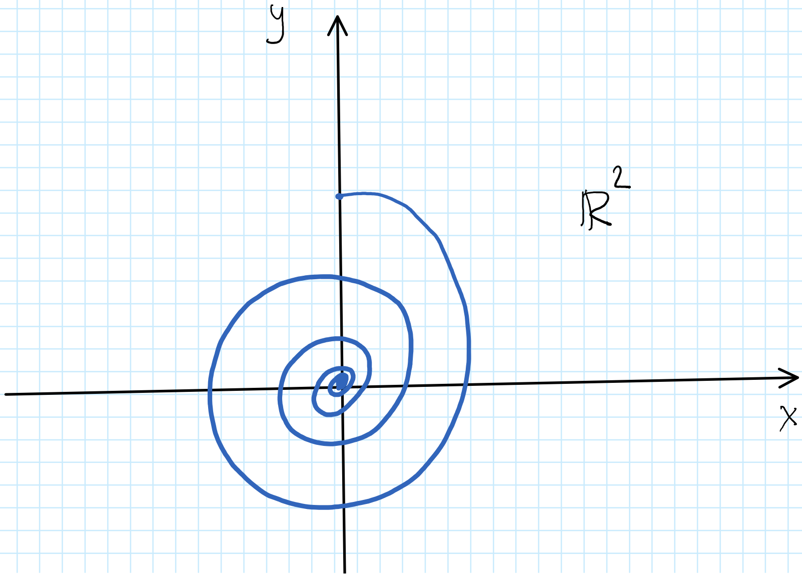
Per $r \neq 0$ e $v \neq 0$ abbiamo una curva regolare.

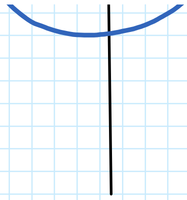
(2) Spirali. Sia $\alpha > 0$ un parametro e consideriamo la curva

$$\gamma : \left[0, \frac{2}{\pi}\right] \to \mathbb{R}^2$$

$$\gamma(t) = \left(t^\alpha \cos\left(\frac{1}{t}\right), \; t^\alpha \sin\left(\frac{1}{t}\right) \right) \qquad t \in \left(0, \frac{2}{\pi}\right]$$

e $\gamma(0) = (0,0)$



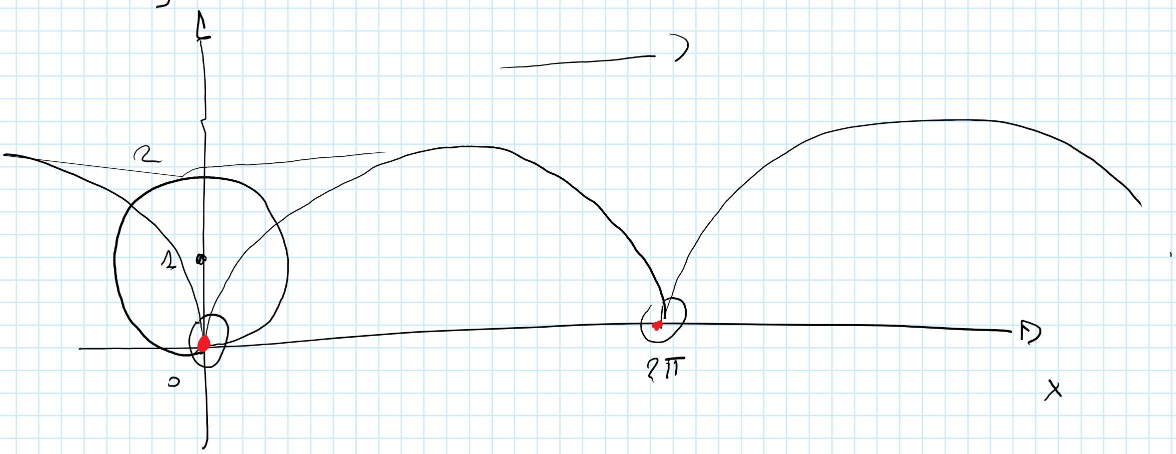


Commento: se $\alpha > 1 \Rightarrow$ curva è di classe C^1

E tuttavia anche per $\alpha > 1$ la spirale non è regolare al $t = 0$

③ Cicloide

Definiamo la curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ in questo modo



Avremo

$$\gamma(t) = (t, 1) + (-\sin t, -\cos t)$$

$$t \in [0, 2\pi]$$

Cicloide

$$\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t), \qquad t \in \mathbb{R}$$

Studio la derivata:

$$\gamma'(t) = (1 - \cos t, + \sin t) \qquad t \in \mathbb{R}$$

Studio

$$\gamma'(t) = 0 \iff \begin{cases} 1 - \cos t = 0 \\ \sin t = 0 \end{cases} \iff t = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Quindi γ non regolare nei punti $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Lunghezza di curve

Fissiamo l'int. $[0,L]$.
Suddivisione di $[0,L]$ è $\sigma = \{t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_k = L\}$
$k \in \mathbb{N}$

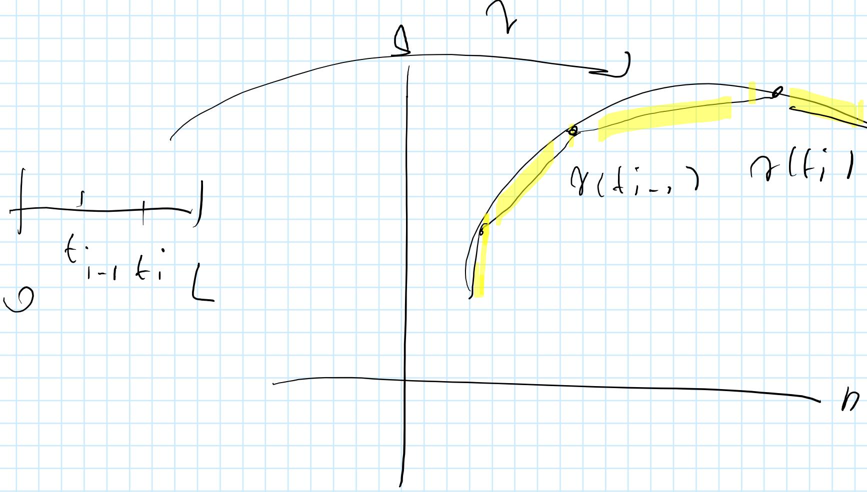
Sia infine $\mathcal{S}([0,L])$ l'insieme di tutte le suddivisioni di $[0,L]$.

Sia ora $\gamma : [0,L] \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.
curva

DEF La lunghezza di γ è:

$$L(\gamma) = \sup\left\{ \sum_{t_i \in \sigma} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| : \sigma \in \mathcal{S}([0,L]) \right\} \in \mathbb{R}$$

Se $L(\gamma) < \infty$ diremo che γ è rettificabile
ovvero che ha lunghezza finita



Commento
La lunghezza non dipende dalla parametrizzazione.

Prossimo obiettivo: Formula della lunghezza.

Preparazione $f : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ continua.

$f = (f_1, \dots, f_n)$

$f_i : [0,1] \to \mathbb{R}$ cont.

Scriveremo

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \left(\int_0^1 f_1(t)\,dt, \dots, \int_0^1 f_n(t)\,dt \right)$$

Usiamo questo fatto:

$$\left| \int_0^1 f(t)\,dt \right| \le \int_0^1 |f(t)|\,dt$$

VERO

TEOR (Formula della lunghezza)

Sia $\gamma \in C^1([0,1];\mathbb{R}^n)$ una curva deriv. con cont. Allora γ è rettificabile e

$$L(\gamma) \underset{\le f.}{\overset{\ge p.}{=}} \int_0^1 |\gamma'(t)|\,dt .$$

Dim. $L = 1$

Parto con la dim $\le$.

Prendo $\sigma \in \mathcal{S}([0,1])$

$$\sum_{t_i \in \sigma} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| \overset{TFCI}{=} \sum_{t_i \in \sigma} \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(s)\,ds \right| \le$$

$$\le \sum_{t_i \in \sigma} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\gamma'(s)|\,ds = \int_0^1 |\gamma'(s)|\,ds$$

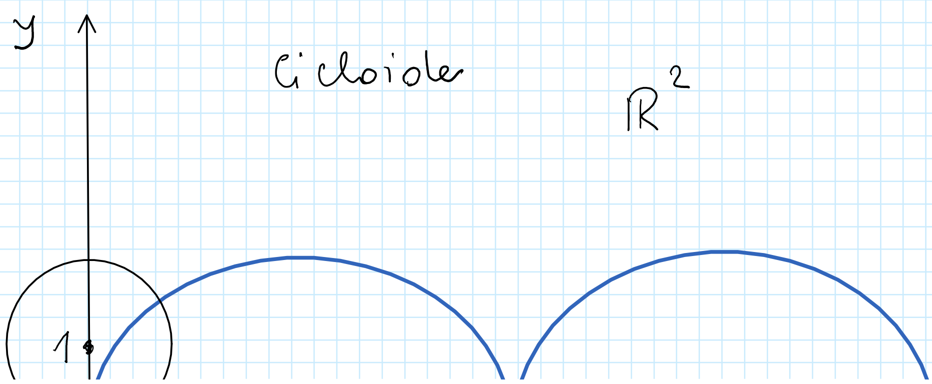
$$\forall \sigma \in \mathcal{S}$$

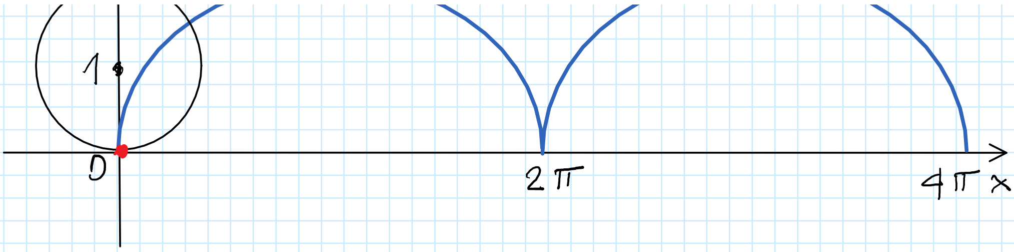
Prendendo il sup su tutte le $\sigma \in \mathcal{S}([0,1])$ trovo

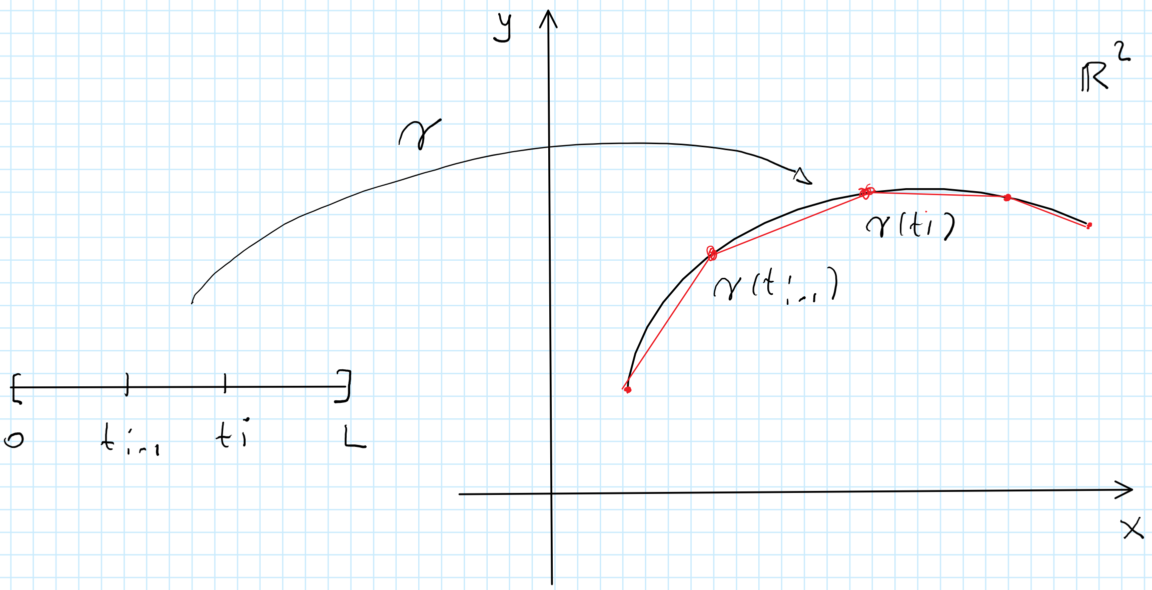
$$L(\gamma) \le \int_0^1 |\gamma'(s)|\,ds .$$

Adesso provo la dim. $\ge$.

Cicloide $\mathbb{R}^2$




1
0
2π
4π
x


y
γ
$\mathbb{R}^2$
γ(ti)
γ(ti-1)
0
ti-1
ti
L
x