Lezione 9

lunedì 4 aprile 2016 12:05

Struttura Esame:

1- Scritto
- Preselezione (Test a risposta secca)
- Prova scritta 3/~~4~~ Problemi / Esercizi.

2 - Orale (per tutti)

2/3 Domande su Definizioni, Teoremi, Dimostrazioni, Fogli Esercizi

Voto Finale: Media di Scritto e Orale.

obiettivo:

$$L(\gamma) = \int_0^L |\dot\gamma(t)|\, dt$$

$\leq$ $L = 1$

Voglio provare che

$$L(\gamma) \geq \int_0^1 |\dot\gamma(t)|\, dt$$

Ci basta, dato un $\varepsilon > 0$, trovare $\sigma = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1\}$ suddiv. tale che

$$\varepsilon + \sum_{t_i \in \sigma} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| \geq \int_0^1 |\dot\gamma(t)|\, dt$$

Ora, siccome $\dot\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ è continua allora è uniformemente cont. su $[0,1]$

Ovvero:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tale che:

$$|t - s| < \delta \Rightarrow |\dot\gamma(t) - \dot\gamma(s)| < \varepsilon$$

A questo punto scelgo una suddiv. σ tale che $0 < t_i - t_{i-1} < \delta \quad \forall i = 1, \dots, k$.

Conto:

$$\int_0^1 |\dot\gamma(s)|\, ds = \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\dot\gamma(s)|\, ds =$$

$$= \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\underbrace{\dot\gamma(s) - \dot\gamma(t_{i-1})}_{\text{uso } |x+y| \leq |x| + |y|,\ \uparrow \mathbb{R}^n} + \dot\gamma(t_{i-1})|\, ds$$

$$\leq \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} \underbrace{|\dot\gamma(s) - \dot\gamma(t_{i-1})|}_{\wedge\ \varepsilon}\, ds + \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\dot\gamma(t_{i-1})|\, ds$$

$$\leq \varepsilon \cdot 1 + \sum_{i=1}^k \underbrace{(t_i - t_{i-1})}_{\vee\ 0} |\dot\gamma(t_{i-1})| =$$

$$= \varepsilon + \sum_{i=1}^k \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot\gamma(t_{i-1})\, ds \right|$$

$\dot\gamma(s)$

$$= \varepsilon + \sum_{i=1} \left| \int_{t_{i-1}} \dots + \dot\gamma(s) \right|$$

$$\le \varepsilon + \sum_{i=1}^{k} \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\dot\gamma(t_{i-1}) - \dot\gamma(s) + \dot\gamma(s)\right) ds \right|$$

$$\le \varepsilon + \sum_{i=1}^{k} \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\dot\gamma(t_{i-1}) - \dot\gamma(s)\right) ds + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot\gamma(s)\, ds \right|$$

$$\le \varepsilon + \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left|\dot\gamma(t_{i-1}) - \dot\gamma(s)\right| ds + \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot\gamma(s)\, ds \right|$$

PARTE CORRETTA

$$\le 2\varepsilon + \sum_{i=1}^{k} \left|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\right| \qquad \square$$

Considerazioni

① Curve date in forma di grafico

Sono curve in $\mathbb{R}^2$ del tipo

$\gamma(x) = (x, f(x)) \quad x \in [a,b]$

dove $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è una funzione.

Curva cartesiana di equazione

$$y = f(x)$$

Siccome

$$\dot\gamma(x) = (1, f'(x))$$

$$|\dot\gamma(x)| = \sqrt{1 + f'(x)^2}$$

E dunque

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

② Curve piane in coordinate polari

Data $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ sia $r : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ con $r \ge 0$. Allora una curva $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$ nella forma

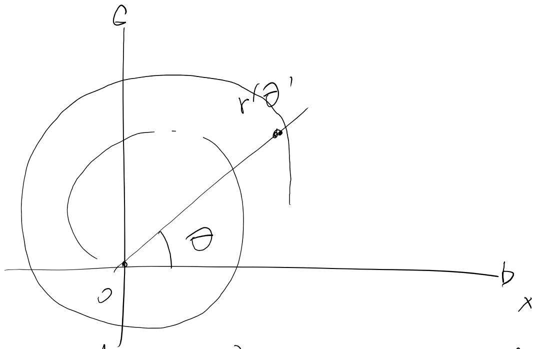
$$\gamma(\theta) = (r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta)$$

$$\theta \in [\alpha, \beta]$$

si dice data in coordinate polari e inoltre l'equazione

$$r = r(\theta)$$

si chiama eq. polare della curva



Se $r \in C^1([\alpha, \beta])$ possiamo calcolare:

$$\dot{\gamma}(\theta) = \frac{d}{d\theta}\left(r\cos\theta,\ r\sin\theta\right)$$

$$= \left(r'\cos\theta - r\sin\theta,\ r'\sin\theta + r\cos\theta\right)$$

Dunque

$$|\dot{\gamma}(\theta)| = \sqrt{(r')^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta + r'^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta}$$

$$= \sqrt{r^2 + r'^2}$$

Dunque

$$L(\gamma) = \int_\alpha^\beta |\dot{\gamma}(\theta)|\, d\theta$$

$$= \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\theta.$$

<u>Integrali curvilinei</u>

Sia $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ una curva di classe C^1.

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

oppure $f : \operatorname{spt}(\gamma) \to \mathbb{R}$ una funzione continua.

<u>DEF</u> L'integrale di f lungo γ si definisce nel seguente modo:

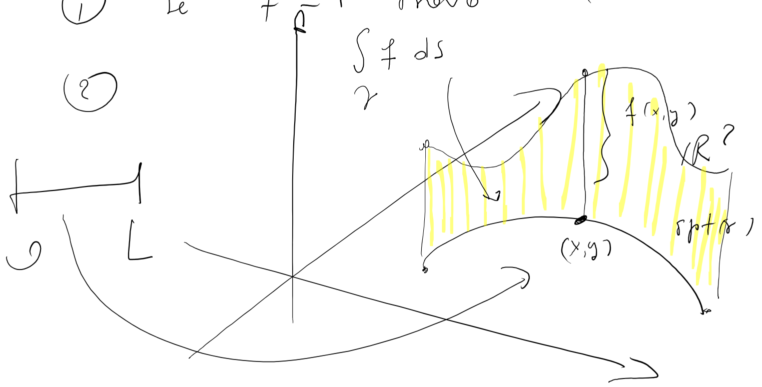
$$\int_\gamma f\, ds = \int_0^L f(\gamma(t))\, |\dot{\gamma}(t)|\, dt.$$

$$\int_{\gamma} f\, ds = \int_0^{\varphi} f(\gamma(t))\, |\gamma'(t)|\, dt.$$

Commenti

① Se $f = 1$ trovo $L(\gamma)$

② $\int_\gamma f\, ds$



③ La definizione non dipende dalla parametrizzazione della curva.
Sia $\varphi : [0, M] \to [0, L]$ uno cambiamento di parametro e sia
$$\varkappa(\tau) = \gamma(\varphi(\tau)) \quad \tau \in [0, M]$$
Prendiamo $\varphi \in C^1$
Avremo 2 casi:

<u>1° Caso</u> $\varphi' \leq 0$ ⊛

<u>2° Caso</u> $\varphi' \geq 0$

<u>Esame ⊛</u> $\varphi(0) = L$

$\varphi(M) = 0.$

Conti

$$\int_{\varkappa} f\, ds \overset{\text{Def}}{=} \int_0^M f(\varkappa(\tau))\, |\varkappa'(\tau)|\, d\tau$$

$$\varkappa(\tau) = \gamma(\varphi(\tau))$$

$$= \int_0^M f(\gamma(\varphi(\tau)))\, |\gamma'(\varphi(\tau)) \cdot \varphi'(\tau)|\, d\tau$$

$$\varkappa'(\tau) = \gamma'(\varphi(\tau))\, \varphi'(\tau)$$

$$|\varphi'(\tau)\gamma'(\varphi(\tau))| = |\varphi'(\tau)|\, |\gamma'(\varphi(\tau))|$$

$$= -\int_0^M f(\gamma(\varphi(\tau)))\, \varphi'(\tau)\, |\gamma'(\varphi(\tau))|\, d\tau$$

Sost.
$t = \varphi(\tau)$
$dt = \varphi'(\tau)\, d\tau$

$=$

$$= \int_0^L f(\gamma(t))\, |\gamma'(t)|\, dt$$

$$= \int_\gamma f \, ds .$$

Esercizi

(1) Sia $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ la curva

$$\gamma(t) = \left(t^2, \frac{2t^3}{3} - t^2 \right), \quad t \in \mathbb{R}$$

- Dire se γ è semplice
- " " " è regolare
- Calcolare il campo tg unit. T
- Calcolare i limiti

$$\lim_{t \to 0^\pm} T(t)$$

- Disegnare il spt $(\gamma) \subset \mathbb{R}^2$

Soluz.

- γ semplice (iniettiva)?

Dati $s, t \in \mathbb{R}$ si ha $\underline{\underline{\gamma(s) = \gamma(t)}}$ se e solo se

$$\begin{cases} t^2 = s^2 \\ \dfrac{2t^3}{3} - t^2 = \dfrac{2s^3}{3} - s^2 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} t^2 = s^2 \\ t^3 = s^3 \end{cases} \iff t = s$$

La curva è 1-1.

- γ reg.? Conti:

$$\gamma'(t) = (2t, 2t^2 - 2t)$$

$$= 2t(1, t-1) \quad (*)$$

Studio

$$\gamma'(t) = 0 \iff \begin{cases} 2t = 0 \\ 2t^2 - 2t = 0 \end{cases}$$

$$\iff$$

Dunque $t = 0$ è l'unico p.to <u>non</u> regolare della curva

$$\gamma(0) = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$$

- Calcolare T:

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$$

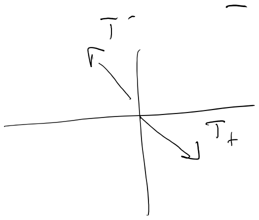
$t \neq 0$

$$= \frac{2t\,(1, t-1)}{2|t|\sqrt{1 + (t-1)^2}}$$

- Limiti:

$$\lim_{t \to 0^+} T(t) = \lim_{t \to 0^+} \frac{(1, t-1)}{\sqrt{1+(t-1)^2}}$$

$$= \frac{(1, -1)}{\sqrt{2}}$$



$$\lim_{t \to 0^-} T(t) = - \frac{(1, -1)}{\sqrt{2}}$$

- Disegnare il supporto della

$$\gamma(t) = \left(t^2, \frac{2t^3}{3} - t^2 \right)$$

$\|$

x

Sostituzione

$$x = t^2 \geq 0 \qquad t \in \mathbb{R}$$

Devo fare le radici

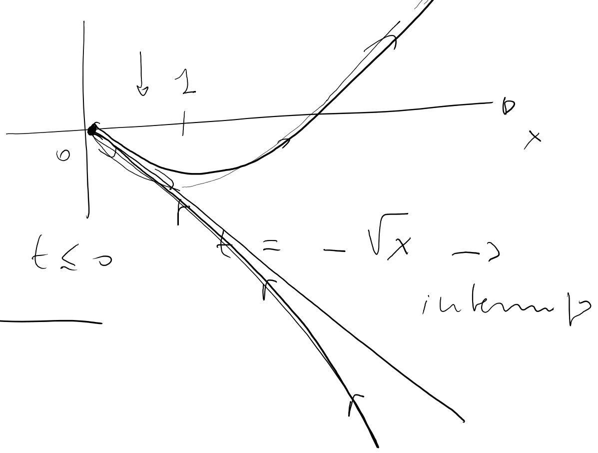
1° <u>caso</u> $t \geq 0$. <u>Allora</u>

$$t = \sqrt{x} = x^{1/2}$$

$$\left(t^2, \frac{2t^3}{3} - t^2\right) = \Big(x, \underbrace{\tfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - x}_{= f(x)}\Big)$$

Dunque nel ramo $t \geq 0$ il spt(γ) è esatt. il grafico di f definita per $x \geq 0$

$$f'(x) = \sqrt{x} - 1 \geq 0 \iff x \geq 1$$



2° caso $t \leq 0$

$t = -\sqrt{x} \to$ interno p