# Analisi Matematica 2 — Foglio 1

Serie numeriche 1 — Febbraio 2017

---

**Esercizio 1.** Studiare la convergenza delle serie numeriche
i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+e^n}{(n+1)!}$; ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{3^n+5^n}$; iii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$.

Risposte: i) converge (Criterio del rapporto); ii) converge (Criterio della radice oppure confronto con la serie geometrica di ragione $4/5$); iii) converge (Criterio del rapporto).

**Esercizio 2.** Studiare la convergenza delle seguenti serie
i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2+1}$; ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\log(n+1)}$; iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-\log n}$; iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-\log n}$.
Risposte: i) converge (Criterio del confronto, usare $\log n \leq \sqrt{n}$ per $n \geq \bar{n}$); ii) diverge (confronto); iii) converge (Leibniz).

**Esercizio 3.** Determinare tutti i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}\left(\sqrt{1+n^4}-n^2\right)$$

converga. Risposta: $\alpha > -1$ (Criterio del confronto).

**Esercizio 4.** Calcolare la somma della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n}$. Risposta: $3/4$. (Cfr. serie telescopiche).

**Esercizio 5.** ★ Sia $0 < a < 1$ un numero reale e definiamo $a_n \in (-1,0)$ tramite la relazione $\sqrt[n]{a} = 1 + a_n$, $n \in \mathbb{N}$.
i) Assumendo come nota la disuguaglianza

$$|a_n| \leq \frac{1}{n}\left(\frac{1-a}{a}\right), \quad n \geq 1, \tag{*}$$

studiare la convergenza semplice della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{a}}{\log^2 n + 1}.$$

ii) Provare la $(*)$.