Analisi Matematica 2 — Foglio 11

Forme differenziali — Maggio 2017

Esercizio 1. Calcolare l'integrale della 1-forma differenziale ω lungo la curva γ assegnata:

i) $\omega = x^2 dx + xy dy$ in $\mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t^2, t)$ con $t \in [-1, 1]$.

ii) $\omega = (x - z)dx + (1 - xy)dy + ydz$ in $\mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$ con $t \in [0, 1]$.

iii) $\omega = 2x(x + y)dx + 2y(x + y)dy$ in $\mathbb{R}^2$ lungo la curva γ con equazione polare $\varrho = k\vartheta$, dove $\vartheta \in [0, \pi/2]$ e $k \geq 0$ è un parametro fissato (spirale di Archimede).

Risp. i) 0; ii) 29/20; iii) $k^3(\pi^2 + 4\pi - 16)/2$.

Esercizio 2. Stabilire se i seguenti insiemi sono contraibili (semplicemente connessi):
i) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \neq 0\}$ in $\mathbb{R}^3$;
ii) $B = \{x \in \mathbb{R}^n : \log(1 + |x|) \geq |x|/2\}$ in $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 1$;
iii) $C = \{(x + y, xy) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ in $\mathbb{R}^2$.
Risp. i) No; ii) Si; iii) Si.

Esercizio 3. Determinare tutti i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che la 1-forma differenziale in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

$$\omega = \frac{1}{(x^2 + y^2)^\alpha}\Big((x - y)dx + (x + y)dy\Big)$$

sia chiusa. Par tali valori ω è anche esatta su $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$?
Risp. $\alpha = 1$; No.

Esercizio 4. Determinare tutti i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che la 1-forma differenziale in $\mathbb{R}^3$

$$\omega = (\alpha y + z)dx + (\alpha x + z)dy + (\alpha x + y)dz$$

sia chiusa. Par tali valori calcolare un potenziale di ω su $\mathbb{R}^3$.

Risp. $\alpha = 1$.

Esercizio 5. Si consideri la 1-forma differenziale nel piano

$$\omega = \Big(\log(x + y) + \frac{x}{x + y}\Big)dx + \frac{x}{x + y}dy.$$

i) Determinare il più grande insieme aperto $A \subset \mathbb{R}^2$ su cui ω è ben definita.

ii) Stabilire se ω è chiusa in A.

iii) Stabilire se ω è esatta in A ed eventualmente calcolarne un potenziale.

Risp. $f(x, y) = x \log(x + y)$.

Esercizio 6. Sia ω la 1-forma differenziale in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

$$\omega = \frac{1 - \sin(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}}(xdx + ydy).$$

Calcolare l'integrale di ω lungo la curva γ di equazione polare $\varrho = \mathrm{e}^{\vartheta}$ con $\vartheta \in [0, \pi/2]$ (spirale logaritmica). Determinare preliminarmente un potenziale della forma.
Risp. iii) $\mathrm{e}^{\pi/2} + \cos(\mathrm{e}^{\pi/2}) - 1 - \cos 1$.

Esercizio 7. Si consideri la forma differenziale su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

$$\omega = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2}((x^2 - y^2)dx - 2xydy).$$

Stabilire se ω è chiusa oppure esatta, ed eventualmente calcolarne un potenziale.