# Analisi Matematica 2 — Foglio 3

Integrali generalizzati — Marzo 2017

---

**Esercizio 1.** Calcolare i seguenti integrali impropri

$$1)\int_0^\infty \frac{\log x}{(x+1)^2}dx; \quad 2)\int_0^\infty x^{-2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\,dx; \quad 3)\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\beta x}\sin(\alpha x)\,dx, \quad \beta>0,\ \alpha\in\mathbb{R}.$$

Risposte: 1) 0. L'integrale su $(0,1)$ è l'opposto di quello su $(1,\infty)$. 2) 1. 3) $\frac{\alpha}{\beta^2+\alpha^2}$. Una primitiva si trova integrando per parti due volte.

**Esercizio 2.** i) Determinare tutti i parametri $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ tali che il seguente integrale improprio converga

$$\int_0^\infty \frac{1+x^\beta}{x^\alpha(1+x^2)}dx.$$

ii) Rappresentare i parametri ammissibili nel piano cartesiano $\alpha\beta$.

Risposte: i) Spezzare l'integrale su $(0,1)$ e $(1,\infty)$. Discutere separatamente quattro integrali elementari. ii) Parallelogramma centrato nell'origine.

**Esercizio 3.** Stabilire se convergono i seguenti integrali impropri (non si chiede di calcolarli)

$$1)\int_0^\infty \sin^2 x\,dx; \quad 2)\int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{1-\sin(x)}}\,dx; \quad 3)\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Risposte: 1) diverge a $\infty$; 2) diverge a $\infty$; 3) converge.

**Esercizio 4.** Calcolare gli $\alpha>0$ tali che converga ciascuno dei seguenti integrali impropri

$$1)\int_0^1 \frac{(1-\cos x)^\alpha}{\tan x - x}\,dx; \quad 2)\int_0^1 \frac{\sin(x^\alpha)}{\log(1+x)}\,dx;$$

$$3)\int_0^\infty \frac{\pi/2-\arctan(\sqrt{x})}{x^\alpha}\,dx; \quad 4)\int_2^\infty \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\log^\alpha x}dx.$$

Risposte: 1) $\alpha>1$; 2) $\alpha>0$; 3) $1/2<\alpha<1$. Al fine di studiare la convergenza a $\infty$ con il Criterio del confronto asintotico, determinare preliminarmente $\beta\in\mathbb{R}$ tale che il limite

$$\lim_{x\to\infty} x^\beta(\pi/2-\arctan(\sqrt{x})) = L \neq 0$$

esista finito e diverso da 0. 4) $\alpha>1$ (Confronto asintotico con $\frac{1}{x\log^\alpha x}$).

**Esercizio 5.** Stabilire se convergono assolutamente i seguenti integrali impropri

$$1)\ \int_0^\infty \frac{\sin x}{1+x^2}dx;\quad 2)\ \int_0^\infty x^2 \mathrm{e}^{-\sqrt{x}} \cos x\, dx;\quad 3)\ \int_1^\infty \left(\frac{1}{x} - \tan\frac{1}{x}\right) \sin x\, dx.$$

Risposte: 1) Converge assolutamente (Confronto). 2) Converge assolutamente (Confronto). Usare la disuguaglianza $x^2\mathrm{e}^{-\sqrt{x}} \leq x^{-2}$ per $x \geq M$. 3) Converge assolutamente (Criterio del confronto asintotico). Ricordare lo sviluppo $\tan x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)$ per $x \to 0$.

**Esercizio 6.** Studiare la convergenza dei seguenti integrali con il Criterio di Abel

$$1)\ \int_2^\infty \frac{\sin x}{\log x}\, dx;\quad 2)\ \int_1^\infty \sin(x) \arcsin\left(\frac{1}{x}\right) dx;\quad 3)\ \int_0^\infty x^2 \cos(x^4)\, dx.$$