Analisi Matematica 2 Foglio 4

Curve Marzo 2017

Esercizio 1. Sia $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{R}^3$ la curva $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t^2)$, $t \in [0, \pi]$.

1) Verificare che γ è regolare, calcolare il campo tangente unitario T e disegnare il supporto.

2) Data la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = \sqrt{|z|}$, calcolare l'integrale $\displaystyle\int_\gamma f\, ds$.

Risp. $[(1 + 4\pi^2)^{3/2} - 1]/12$.

Esercizio 2. Siano $L > 0$ ed $\alpha \geq 0$ due parametri fissati. Calcolare la lunghezza della curva $\gamma : [L, L] \to \mathbb{R}^3$

$$\gamma(t) = (\alpha \cosh t\, \cos t, \alpha \cosh t\, \sin t, \alpha t), \quad t \in [-L, L].$$

Disegnare il supporto di γ. Risp. $2\sqrt{2}\alpha \sinh L$.

Esercizio 3. Si consideri la curva piana $\gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = \Big(\frac{t^3}{3} - t, (\log t)^2\Big), \quad t > 0.$$

i) Stabilire se γ è semplice e se è regolare.

ii) Se possibile, calcolare il campo tangente unitario $T(t)$ e poi calcolare i limiti

$$\lim_{t \to 1^\pm} T(t).$$

iii) Disegnare il supporto di γ.

Esercizio 4. Si consideri il tratto di cicloide $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Posto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$, si consideri la funzione $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x\sqrt{y}$. Calcolare l'integrale di f lungo γ

$$I = \int_\gamma f\, ds.$$

Esercizio 5. Sia $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ la curva piana data dall'equazione polare $\varrho = 1 - \cos\vartheta$, $\vartheta \in [0, 2\pi]$. Disegnare il supporto di γ e calcolare la sua lunghezza.

Risp. $L = 8$. La curva γ è la cardioide.

Esercizio 6. ★ Siano $f, F \in C^2([0, 1])$ due funzioni convesse tali che $f \leq F$ in tutti i punti, $f(0) = F(0)$ ed $f(1) = F(1)$. Consideriamo le curve date in forma cartesiana $\gamma(t) = (t, f(t))$ e $\Gamma(t) = (t, F(t))$. Provare che $L(\Gamma) \leq L(\gamma)$.