Analisi Matematica 2

Foglio 5

Spazi metrici e limiti in più variabili

Aprile 2017

Esercizio 1. Quali tra le seguenti funzioni $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$ sono distanze su $\mathbb{R}$?
ii) $d(x, y) = |x - y| + |x^3 - y^3|$.
iii) $d(x, y) = x^2 + y^2 + xy$.
iv) $d(x, y) = \dfrac{|x - y|}{1 + |x - y|}$.

Esercizio 2. Determinare il più grande sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ su cui è definita ciascuna delle seguenti funzioni:
i) $f(x, y) = \sqrt{xy + \log x}$; ii) $g(x, y) = \sqrt{xe^y - ye^x}$; iii) $h(x, y) = \sqrt{xy(xy - 1)}$.

Esercizio 3. Stabilire se esistono ed eventualmente calcolare i seguenti limti:

$$\text{i)} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^4)}{x^2 + y^2}; \qquad \text{ii)} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^4 + y^4)}{x^2 + y^2}.$$

Esercizio 4. Stabilire se la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x \sin y - y \sin x}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

è continua nel punto $(0, 0)$.

Esercizio 5. Determinare tutti i valori del parametro $\alpha > 0$ tali che la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{y|x|^\alpha}{x^4 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

sia continua nel punto $(0, 0)$.

Esercizio 6. ★ Sia $\alpha \in (0, 1]$ e definiamo la funzione $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$

$$d(x, y) = |x - y|^\alpha, \quad x, y \in \mathbb{R}^n,$$

dove $| \cdot |$ è la norma standard di $\mathbb{R}^n$. Provare che $(\mathbb{R}^n, d)$ è uno spazio metrico.