Analisi Matematica 2 Foglio 6

Convergenza uniforme Aprile 2017

Esercizio 1. Si consideri la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \frac{(n+1)x + n^2x^3}{1 + n^2x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ su $\mathbb{R}$.

Esercizio 2. Studiare la convergenza puntuale e uniforme su $\mathbb{R}$ della successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ così definita

$$f_n(x) = \frac{1 + x^n}{n + x^{2n}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 3. Sia $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, la successione di funzioni

$$f_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^{2n}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

i) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

ii) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione delle derivate $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$.

Esercizio 4. Al variare di $x \in \mathbb{R}$ studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{nx^2 - n^2x}.$$

Esercizio 5. Al variare di $x > 0$ studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1 - \log x) \log^n x,$$

e calcolarne la somma.

Esercizio 6. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ un parametro e si consideri la serie di potenze complessa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1 + n^\alpha)}{\sqrt{n}} z^n.$$

i) Calcolare il raggio di convergenza R della serie.
ii) Discutere la convergenza uniforme della serie.

Esercizio 7. ★ Costruire funzioni $f, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, tali che:
1) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;
2) per ogni $-\infty \leq a < b \leq \infty$ la convergenza al punto 1) non è uniforme su (a, b).