

Analisi Matematica 2

Foglio 7

Funzione esponenziale, topologia

Aprile 2017

Esercizio 1. Dedurre le formule di addizione per seno e coseno per $x, y \in \mathbb{R}$

$$\sin(x + y) = \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y)$$

$$\cos(x + y) = \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y),$$

a partire dall'identità funzionale per l'esponenziale $\exp(z + \zeta) = \exp(z) \exp(\zeta)$ con $z, \zeta \in \mathbb{C}$ e dalle identità di Eulero

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Esercizio 2. Determinare interno, frontiera e chiusura dei seguenti sottoinsiemi di \mathbb{R}^2 . Dire se sono aperti, chiusi (o né aperti né chiusi):

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\};$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\};$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \neq 1, y \geq x^2\};$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1\}.$$

Esercizio 3. Sia \mathbb{R} munito della distanza Euclidea e sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Provare o confutare tramite controesempi le seguenti affermazioni: i) $f(A)$ aperto $\Rightarrow A$ aperto; ii) A aperto $\Rightarrow f(A)$ aperto; iii) $f(A)$ chiuso $\Rightarrow A$ chiuso; ii) A chiuso $\Rightarrow f(A)$ chiuso.

Esercizio 4. Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ l'insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 + x^2 - y^2 < 1\}.$$

i) Provare che A è limitato; ii) Stabilire se A è aperto e/o chiuso.

Soluzione negli appunti on line.

Esercizio 5. Provare che la costante di Eulero e non è un numero razionale.

Sugg. Dalla formula

$$\frac{1}{e} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$$

si ottiene la stima per le somme parziali

$$0 < \frac{1}{e} - s_{2k-1} < \frac{1}{(2k)!}.$$