LEZIONE 1

venerdì 24 febbraio 2017 18:00

Lunedi' 27 ore 10.30

Analisi Matematica 2 – 2017
Fisica–Astronomia

Programma provvisorio del corso

1) Serie numeriche. Serie geometrica. Serie telescopiche. Serie armonica generalizzata. Criterio della radice e del rapporto per serie reali. Convergenza assoluta di serie reali e complesse. Serie reali a segno alterno. Criterio di Leibniz. Criterio del confronto asintotico

2) Integrali generalizzati. Criteri del confronto e del confronto asintotico, convergenza assoluta. Criterio di convergenza per integrali oscillanti. Convergenza di serie ed integrali.

3) Spazi metrici. Definizioni, insiemi aperti, interno e chiusura. Funzioni continue. Spazi metrici completi e teorema e delle contrazioni. Topologia di uno spazio metrico. Spazi metrici compatti e teorema di Weierstrass. Insiemi connessi.

4) Serie di funzioni. Successioni e serie di funzioni. Convergenza uniforme. Criterio di Weierstrass. Serie di potenze. Funzione esponenziale in campo reale e complesso.

5) Calcolo differenziale in più variabili. Derivate parziali e derivate direzionali in $\mathbb{R}^n$. Funzioni differenziabili. Gradiente e matrice Jacobiana. Differenziale della funzione composta. Teoremi del valor medio. Funzioni di classe C^1. Derivate di ordine superiore. Teorema di Schwarz e matrice Hessiana. Funzioni di classe C^k. Punti critici, massimi e minimi locali. Formula di Taylor in più variabili al secondo ordine. Massimi e minimi locali in più variabili.

6) Curve e 1-forme differenziali in $\mathbb{R}^n$ Curve, versore tangente, parametrizzazione. Curve rettificabili e formula della lunghezza. Riparametrizzazione a lunghezza d'arco. Integrali curvilinei. Forme differenziali chiuse ed esatte. Campi conservativi. Integrazione di 1-forme. Teorema di Poincarè.

Dini

7) Invertibilità locale e funzione implicita. Teorema di invertibilità locale e Teorema del Dini. Omeomorfismi e diffeomorfismi locali e globali.

Analisi Matematica 2 – 2017
Fisica e Astronomia – Canale 1

– **Docente**:

Roberto Monti
Dipartimento di Matematica
Torre Archimede, scala D, VII piano, Studio 730
Tel. 049 827 14 21
Posta elettronica: monti@math.unipd.it
Pagina internet:
http://www.math.unipd.it/~monti/didattica.html
http://www.math.unipd.it/~monti/A2_2017.html

– **Orario lezioni**:

lunedì 10.30–12.30, Aula D piano terra Vallisneri 10.30 - 11.15 11.30 - 12.15
martedì 8.30–10.30, Aula D piano terra Vallisneri 8.45 - 10.15
mercoledì 10.30–12.30, Aula D piano terra Vallisneri come lunedì

– **Calendario del corso**: inizio 27 Febbraio 2017. Totale 64 ore.

– **Tutorato a cura di Riccardo Ciccone**: Orari ed Aula saranno fissati al più presto.

– **Ricevimento**: martedì 14.30–16.30, Ufficio 730, Piano VII, Scala D di Torre Archimede, via Trieste 63. Preferibile appuntamento per e-mail. Oppure per appuntamento e-mail anche in altri giorni e orari.

– **Materiali on line**: Alla pagina internet del corso verranno messi in rete gli appunti delle lezioni. Ogni settimana verranno anche proposti on line esercizi e problemi da risolvere. Con frequenza settimanale verranno pubblicati on-line i pdf delle lezioni fatte al tablet.

– **Struttura del corso**: Lezioni alla lavagna oppure su tablet di teoria ed esercizi.

– **Testi di riferimento**:

1) È in rete una versione preliminare degli Appunti del Corso.

Altri testi di riferimento (ma non adottati):

2) N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone, Analisi matematica due, Liguori, ultima edizione. È un libro concreto e rigoroso. Ha i suoi volumi di esercizi associati.
3) E. Giusti, Analisi Matematica 2, Boringhieri. Continua l'Analisi 1 dello stesso autore. Ma è un po' più difficile.
4) G. De Marco, Analisi due – teoria ed esercizi –, Zanichelli 1999. Un classico per l'Università di Padova.

– **Testi di esercizi**:
   1) È prevista la pubblicazione in rete di fogli settimanali di esercizi e problemi. I problemi assegnati per casa saranno parte integrante del programma del corso.
   2) Alla fine degli Appunti del Corso disponibili in rete si trovano numerosi esercizi.
   3) G. De Marco, C. Mariconda, Esercizi di analisi 2, Zanichelli.
   4) P. Marcellini, C. Sbordone, Esercizi di Matematica, Volume II - Tomi 1-2-3-4, Liguori. Contiene molti esercizi di base ed esercizi con soluzione.
   5) E. Giusti, Esercizi e complementi di Analisi matematica, Volume secondo, Boringhieri.

– **Modalità d'esame**. Prova scritta ed orale (in particolare: orale obbligatorio per tutti, a differenza dello scorso anno). Nella prova scritta ci saranno quattro problemi o esercizi da risolvere. Nella prova orale lo studente deve dimostrare di aver compreso gli argomenti spiegati nel corso (definizioni, teoremi e dimostrazioni). Per accedere alla prova orale sarà necessario superare quella scritta. Non sono previste prove parziali.

– **Appelli d'esame (date da confermare):**

Sessione estiva:
20 giugno 2017, ore 10.30, prima prova scritta
23 giugno 2017, ore 9.00, prima prova orale

10 luglio, ore 10.30, seconda prova scritta
17 (e 18) luglio, ore 9.00, seconda prova orale

Sessione di Recupero:
29 agosto, ore 10.30, terza prova scritta
4 settembre, ore 9.00, terza prova orale

18 settembre, ore 10.30, quarta prova scritta
21 (e 22) luglio, ore 9.00, quarta prova orale

Sessione Invernale (Febbraio 2018): da definire

– **Iscrizione agli esami.** Sistema UNIWEB. Controllare sempre data, orario ed aula.

SERIE REALI E/O COMPLESSE

$\mathbb{R}$ insieme numeri reali

$\mathbb{C}$ insieme di numeri complessi

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali o complessi.

Vogliamo definire la somma infinita

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \begin{matrix}\text{Vogliamo} \\ \in \mathbb{R} \\ \in \mathbb{C}\end{matrix}$$

Formiamo la successione delle somme parziali

$$S_n := a_1 + a_2 + \dots + a_n \quad , \quad n \in \mathbb{N} .$$

La successione $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ può convergere in $\mathbb{R}$ (in $\mathbb{C}$) oppure non converge etc.

<u>DEF</u> Diremo che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longleftarrow \text{(è convergente)} .$$

Converge se esiste <u>finito</u> il limite

$$S := \lim_{n\to\infty} S_n \quad \in \mathbb{R} \quad (\in \mathbb{C}) .$$

e porremo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \quad \leftarrow \text{"somma della serie"} .$$

Se la serie è reale si può verificare il caso

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \begin{matrix} +\infty \\ (-\infty) \end{matrix}$$

In questo caso diremo che la serie diverge a $\pm\infty$ e scriveremo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \pm\infty .$$

Negli altri casi la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ <u>non</u> è definita.

<u>DEF</u> Data una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, chiameremo (a_n) la sua successione dei termini generali.

$$a_n = \text{termine generale della serie}$$

<u>TEOR</u> (Criterio della cond. Necessaria di convergenza)

Supponiamo che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converga (ad un valore finito). Allora il suo termine generale è infinitesimo:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 .$$

<u>ESEMPIO</u> La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \qquad = a_n$$

NON CONVERGE. Infatti il termine generale non è infinitesimo.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+1/n} = 1 \neq 0$$

uso il Crit. CN.

Dim. Per ipotesi esiste finito:

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

$s \in \mathbb{R}$

Esaminiamo

$$\underline{\lim_{n\to\infty} a_n} = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1})$$

$$= \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1}$$

$$= s - s \ \underline{= 0}$$

□

COMMENTO :

$$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \not\Longrightarrow \quad \underline{\underline{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge}}}$$

$$\xLeftarrow{\text{si}}$$

ESEMPI

① Serie geometrica.

Sia $z \in \mathbb{C}$ tale che $|z| < 1$.
Studiamo la serie geometrica di ragione z:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

Convenzione solo qui

$$0^0 = 1 .$$

Somme parziali

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} z^k = 1 + z + z^2 + \dots + z^n$$

se $z \neq 1$ (ok per noi)

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1-z}}, \quad \forall z \neq 1.$$

Dim:

$$(1-z)(1+z+\dots+z^n) = 1 - z^{n+1}.$$

Ma ora se $|z|<1$ allora $\lim_{n\to\infty} z^{n+1} = 0$

Quindi

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1-z^{n+1}}{1-z} = \frac{1}{1-z}.$$

FORMULA:

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}, \quad |z|<1.$$

AD ESEMPIO

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = -1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= -1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= -1 + \frac{2}{2-1} = 1.$$

(2) SERIE TELESCOPICHE

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una succ. reale o complessa

Formiamo la succ

$$b_n = a_{n+1} - a_n .$$

Allora:

$$\sum_{k=0}^{n} b_k = \sum_{k=0}^{n} \left(a_{k+1} - a_k\right)$$

$$= a_{n+1} - a_0$$

Se ora esiste finito

$$L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$$

allora la serie delle b_n converge e di più

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} - a_0 = L - a_0 \in \mathbb{R} .$$

Problema: pochissime successioni b_n si scrivono come differenza

$$b_n = a_{n+1} - a_n \qquad \forall n \in \mathbb{N} .$$

Esempio

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$a_k = \frac{1}{k} \qquad = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 .$$

(3) Somma di tutti gli $\frac{1}{\ }$, $n = 1, 2, 3 \dots$

$n \to \infty$

(3) Somma di tutti gli $\frac{1}{n^2}$, $n = 1, 2, 3 \dots$

Vogliamo vedere che la seguente serie converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

Osservo che

$$n^2 = n \cdot n \geq n \cdot (n-1)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$$

$$\forall\, n \geq 2$$