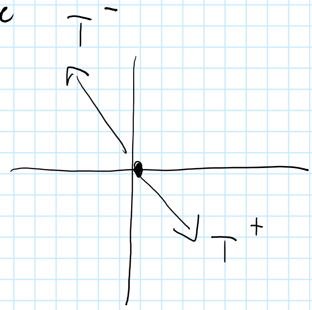
Lezione 10

mercoledì 22 marzo 2017 10:23

Curva $\gamma(t) = \left(t^2, 2\frac{t^3}{3} - t^2\right)$, $t \in \mathbb{R}$

- in $t=0$ γ <u>NON</u> regolare
- $T(t) = \dots$ $t \neq 0$



Vogliamo disegnare il supporto della curva.
Cerco di riparametrizzare la curva in modo tale da avere una nuova curva in forma cartesiana:

Poniamo

$$x = t^2 \geq 0 \qquad (x \geq 0)$$

Inverto

$$t = \pm\sqrt{x}$$

1° Pezzo: $t \geq 0$. Allora $t = \sqrt{x}$

Sost. trovo la curva

$$\gamma_+(x) = \Big(x, \underbrace{\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - x}_{= f(x)}\Big) \qquad x \geq 0$$

$f(x)$, $x \geq 0$

- $f(0) = 0$ $\qquad \lim_{x \to \infty} \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - x = +\infty$
- $f(x) \geq 0 \iff \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - x \geq 0$

$$\iff 2x^{3/2} \geq x$$

$$\iff \quad \frac{2}{3}\, x^{3/2} \geq x$$

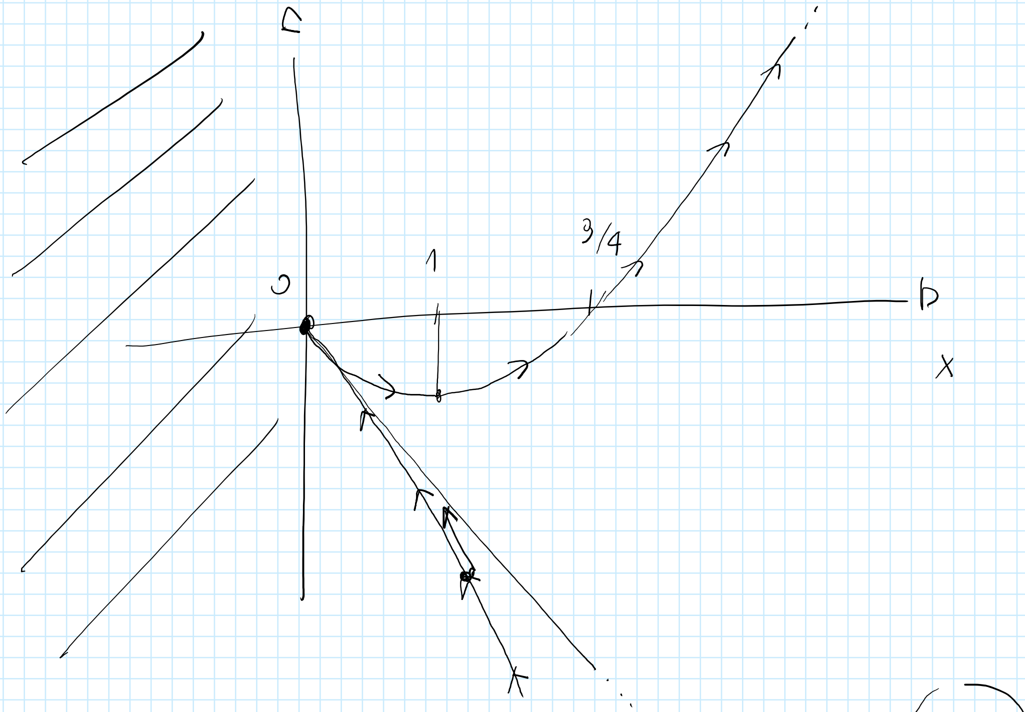
$$\iff \quad \frac{2}{3}\, x^{1/2} \geq 1$$

$$\iff \quad x^{1/2} \geq \frac{3}{2}$$

$$\iff \quad x \geq \frac{9}{4}$$

- $f'(x) = x \underline{\underline{\geq 0}} \iff x^{1/2} \geq 1$

  $\iff x \geq 1$



$\underline{2° \text{ Pezzo}}$: $t \leq 0$: Devo scegliere $t = -\sqrt{x}$

Trovo

$$r_-(x) = \Big(x, \underbrace{-\frac{2}{3}\, x^{3/2} - x}_{= f(x)}\Big) \qquad x \geq 0$$

- $f(0) = 0 \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$
- $f(x) < 0 \ \forall x \quad ; \quad f(x) \leq -x \quad \forall x \geq 0$

• f è decrescente. □

Riparametrizzazione a lunghezza d'arco

DEF. Diciamo che una curva $\gamma \in C^1([0,L];\mathbb{R}^n)$ è parametrizzata a lunghezza d'arco se

$$|\dot\gamma(t)| = 1 \qquad \forall\, t \in [0,L].$$

COMMENTO La lunghezza di γ ristretta all'intervallo $(t_1,t_2] \subset [0,L]$ è:

$$L\left(\gamma|_{[t_1,t_2]}\right) = \int_{t_1}^{t_2} |\dot\gamma(t)|\,dt = t_2 - t_1$$

rettificabile

TEOR. Ogni curva (regolare) ammette una parametrizzazione a lunghezza d'arco.

Integrali curvilinei

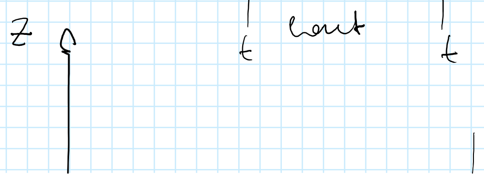
Sia $\gamma \in C^1([0,L];\mathbb{R}^n)$. Sia poi

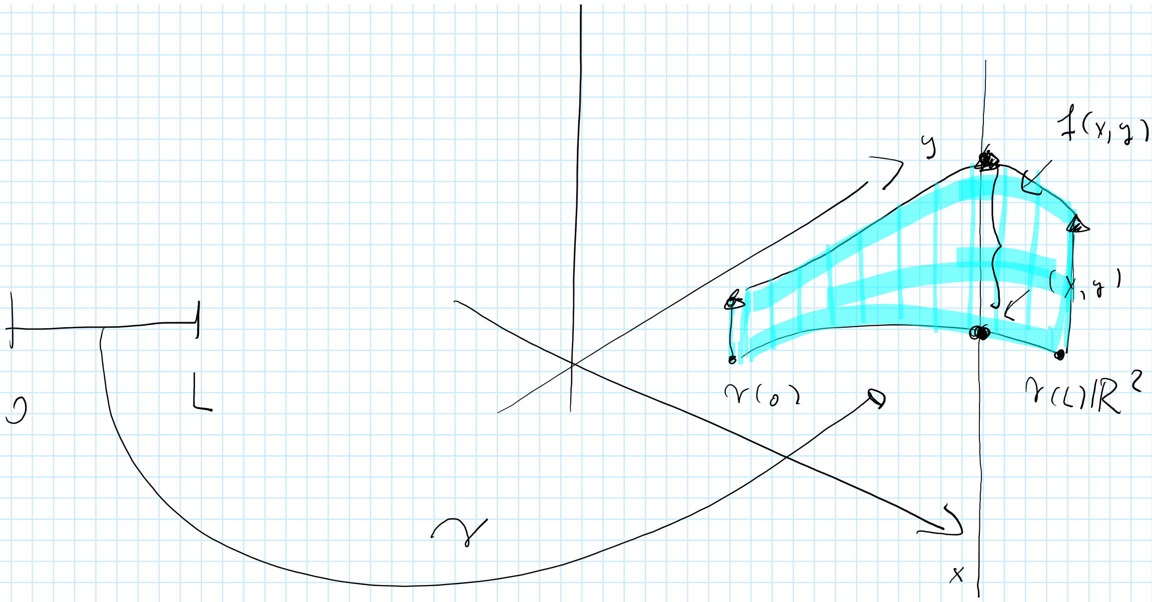
$$f : \operatorname{spt}(\gamma) \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{continua.}$$

DEF L'integrale curvilineo di f lungo la curva γ si definisce come segue:

$$\boxed{\int_\gamma f\,ds} := \int_0^L \underbrace{f(\gamma(t))}_{\uparrow\, t} \; \overbrace{|\dot\gamma(t)|}\,dt$$

t cont t





L'area della regione azzurra è esattamente l'integrale curvilineo.

OSS Se $f \equiv 1$ bravo

$$\int_\gamma f \, ds = \int_0^L 1 \cdot |\gamma'| \, dt = L(\gamma)$$

OSS La definizione di integrale curvilineo non dipende dalla parametrizzazione.

Sia $\varphi : [0,M] \to [0,L]$ una riparametrizzazione di classe C^1.

Definiamo

$$\varkappa(s) := \gamma(\varphi(s)) \qquad s \in [0,M]$$

Voglio dimostrare che

$$= \int_\varkappa f \, ds \overset{?}{=} \int_\gamma f \, ds .$$

Conti

Conti

$$= \int_0^M f(\kappa(s))\, |\dot{\kappa}(s)|\, ds$$

$$\kappa(s) = \gamma(\varphi(s))$$

$$\dot{\kappa}(s) = \dot{\gamma}(\varphi(s))\,\varphi'(s)$$

$$= \int_0^M f(\gamma(\varphi(s)))\, |\dot{\gamma}(\varphi(s))\, \varphi'(s)|\, ds$$

$$= \int_0^M f(\gamma(\varphi(s)))\, |\varphi'(s)|\, |\dot{\gamma}(\underline{\underline{\varphi(s)}})|\, ds$$

$$= \circledast$$

Faccio il cambio di variabile di integrazione

$$t = \underline{\underline{\varphi(s)}}$$

$$\underline{\underline{dt}} = \underline{\underline{\varphi'(s)\, ds}}$$

Esamino il caso $\varphi'(s) \leq 0 \quad \forall s$.

In questo c'è un cambio di orientazione.

Avremo: $\varphi(0) = L$

$\varphi(M) = 0$

$$|\varphi'(s)|\, ds = -\varphi'(s)\, ds = -dt$$

$$\circledast = \int_L^0 f(\gamma(t))\, |\dot{\gamma}(t)| \cdot (-1)\, dt$$

$$\int_0^L f(\gamma(t))\, |\dot{\gamma}(t)|\, dt = \int f\, ds$$

$$= \int_0^L f(\gamma(t))\,|\gamma'(t)|\,dt = \int_\gamma f\,ds \qquad \square$$

ESEMPIO $\gamma \in C^1([0,L];\mathbb{R}^n)$ reg.

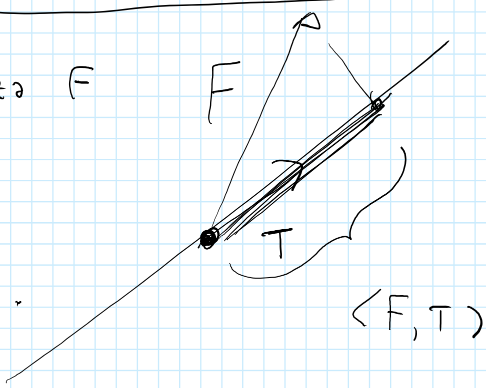
$$F : \underset{\operatorname{spt}(\gamma)}{\mathbb{R}^n} \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{campo vettoriale}$$

Sia $T = (T_1, \dots, T_n)$ il campo unitario tangente.

$$\langle F, T \rangle = F_1 T_1 + \dots + F_n T_n$$

Allora il lavoro della forza F lungo il cammino γ è

$$\text{lavoro} = \int_\gamma \langle F, T \rangle \, ds .$$



qui $|T| = 1$

ES 2

$\pi]$

Posto $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y - 1 \geq 0 \}$,

sia $f : A \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y - 1} .$$

Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri la curva

$$\gamma_\alpha : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$$

$$\gamma_\alpha(t) = (t, 1-\alpha t^2) \qquad |t| \leq 1$$

Determinare i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui l'integrale curv.

$$I_\alpha = \int_{\gamma_\alpha} f \, ds$$

è ben definito e poi calcolarlo.

Sol. Si deve assicurare che $\gamma_\alpha(t) \in A$ $\forall t \in [-1,1]$

OVVERO

$$(t, 1-\alpha t^2) \in A = \{ x^2 + y - 1 \geq 0 \} \quad \forall |t| \leq 1$$

$$\Updownarrow$$

$$t^2 + \cancel{1} - \alpha t^2 \cancel{-1} \geq 0 \qquad \forall |t| \leq 1$$

$$t^2 (1-\alpha) \geq 0 \qquad \forall |t| \leq 1$$

Quindi α deve verificare $1-\alpha \geq 0$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\alpha \leq 1}$$

Conti:

$$\int f \, ds = \int^{+1} f(\gamma_\alpha(t)) \, |\gamma'(t)| \, dt$$

$$\int_{\gamma_\alpha} f \, ds = \int_{-1}^{+1} f(\gamma_\alpha(t)) \, |\dot{\gamma}_\alpha(t)| \, dt$$

dove

$$f(\gamma_\alpha(t)) = \sqrt{t^2 + \cancel{1} - \alpha t^2 \cancel{- 1}}$$

$$= \sqrt{t^2 (1-\alpha)}$$

$$= |t| \sqrt{1-\alpha} \longleftarrow$$

$$\dot{\gamma}_\alpha(t) = (1, -2\alpha t) \qquad |t| \leq 1$$

$$|\dot{\gamma}_\alpha(t)| = \sqrt{1 + 4\alpha^2 t^2}$$

Dunque

$$I_\alpha = \int_{-1}^{+1} |t| \sqrt{1-\alpha} \sqrt{1+4\alpha^2 t^2} \, dt$$

$$= 2 \int_0^1 t \sqrt{1-\alpha} \sqrt{1+4\alpha^2 t^2} \, dt$$

$$= \ldots = \frac{\sqrt{1-\alpha}}{6\alpha^2} \left((1+4\alpha^2)^{3/2} - 1 \right).$$