Lezione 11

lunedì 27 marzo 2017 10:28

SPAZI METRICI

Nel seguito X indicherà un insieme.

DEF Uno Spazio Metrico è una coppia (X, d) dove X è un insieme e $d : X \times X \to [0, \infty)$ è una funzione detta distanza tale che $\forall\, x, y, z \in X$ si verifichi:

$$d(x,y) \geq 0 \quad e \quad d(x,y) = 0 \iff x = y$$

2) $d(x,y) = d(y,x)$ (simmetria)

3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (disuguaglianza triangolare)

ESEMPI

(1) $X = \mathbb{R}$ $\quad d(x,y) := |x-y|$

$(\mathbb{R}, d)$ è SM

(2) $X = \mathbb{R}$ $\quad d(x,y) = |x-y|^{1/2}$ $\quad x, y \in \mathbb{R}$

è uno SM

(3) $X = \mathbb{C}$ e dati $z, w \in \mathbb{C}$

$$d(z,w) = |z-w|$$

$(\mathbb{C}, d)$ è uno SM detto piano Euclideo

(4) $X = \mathbb{R}^n$ $\quad n \geq 1$. Definiamo

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \qquad x, y \in \mathbb{R}^n$$

$(\mathbb{R}^n, d)$ è uno SM

(5) Sia X un insieme qualsiasi e definiamo $d : X \times X \to [0, \infty)$

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

(X, d) si dice spazio metrico discreto.

Fissato un punto $x \in X$ SM e un raggio $r > 0$ definiamo:

$$B_r(x) = B(x,r) = B_{(X,d)}(x,r) :=$$

$$:= \{ y \in X : d(x,y) < r \}$$

la palla di centro $x \in X$ e raggio $r > 0$.

ESERCIZIO Sia (X, d) uno SM.
Sia poi $Y \subset X$

Restringo $d : X \times X \to [0, \infty)$ su Y:

$$d_{/Y} : Y \times Y \to [0, \infty)$$

Allora (Y, d_Y) è uno SM. Inoltre

$$B_Y(y,r) = B_X(y,r) \cap Y .$$

$$y \in Y$$
$$r > 0$$

DEF (Spazio Normato) Uno spazio normato (reale) è uno spazio vettoriale V munito di una norma $\|\cdot\| : V \to [0,\infty)$ che verifica le seguenti 3 proprietà:

① $\|v\| \geq 0 \quad \forall v \in V$ e $\|v\| = 0 \iff v = 0$.

② $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\| \quad \forall v \in V$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

(positiva omogeneità)

③ $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \quad \forall v, w \in V$.

sub-additività.

Commento Gli spazi normati sono canonicamente spazi metrici:

Posso definire la distanza

$$d(v,w) = \|v - w\| \qquad v, w \in V$$

È verificata la dis. triangolare:

$$d(v,w) = \|v - w\| = \|v - z + z - w\| \leq$$

$$\leq \|v - z\| + \|z - w\| = d(v,z) + d(z,w)$$

ESEMPIO $X = \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$

Definiamo la norma Euclidea

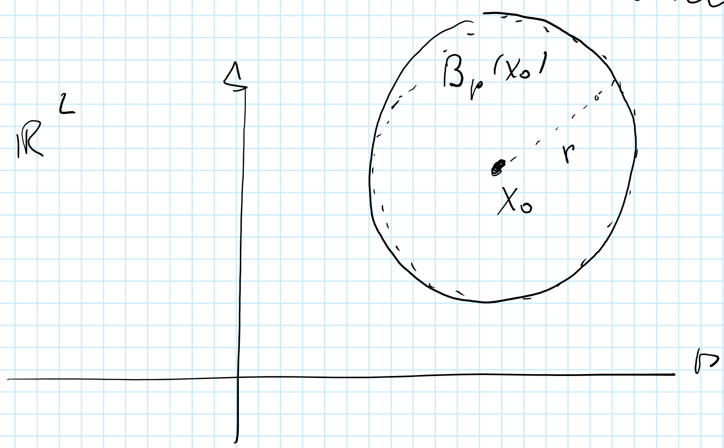
$$|\cdot| : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$$

$$\left(\sum^{n} \quad \right)^{1/2}$$

$$|\cdot| : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$$

$$(*) \quad |x| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n .$$

È una norma $\longrightarrow$ distanza Euclidea.



In $\mathbb{R}^n$ possiamo definire il prodotto scalare standard $\langle \cdot , \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\langle x, y \rangle := x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \qquad x, y \in \mathbb{R}^n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Altre notazioni: $\langle x, y \rangle = (x, y) = x \cdot y$

Le sue proprietà sono:

(1) $\langle \alpha x + \beta y , z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$

$\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}^n$

$\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(2) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \quad \forall\, x, y$

(3) $\langle x, x \rangle \geq 0$ e $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

ORA chiaramente

$$|x| = \left(\sum^{n} x_i \cdot x_i \right)^{1/2}$$

$$|x| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot x_i \right)^{1/2}$$

$$= \left(\langle x, x \rangle \right)^{1/2} = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Dunque

Prod. scalare $\longrightarrow$ Norma $\longrightarrow$ distanza.

LEMMA Per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ vale la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$|\langle x, y \rangle| \leq |x| \cdot |y| .$$

DIM. Consideriamo il polinomio in $t \in \mathbb{R}$

$$0 \leq P(t) = |x + ty|^2$$

$$= \langle x + ty, x + ty \rangle$$

$$= \langle x, x \rangle + 2t \langle x, y \rangle + t^2 \langle y, y \rangle$$

$$= |x|^2 + 2t \langle x, y \rangle + t^2 |y|^2$$

Deve essere

$$0 \geq \Delta = b^2 - 4ac = 4 \langle x, y \rangle^2 - 4 |x|^2 |y|^2$$

e dunque

$$\langle x, y \rangle^2 \leq |x|^2 |y|^2$$

$$\Updownarrow$$

$$|\langle x, y \rangle| \leq |x| \cdot |y| .$$

$\square$

ESERCIZIO: Supponiamo che:

$$|(x,y)| = |x| \cdot |y| \quad .$$

Come sono relazionati tra loro x e y ?

ORA proviamo che la Norma Euclidea verifica la proprietà ③ (sub-additività):

$$|x+y|^2 = (x+y, x+y)$$

$$= |x|^2 + 2(x,y) + |y|^2$$

Dis. C-S

$$\leq \quad |x|^2 + 2|x| \cdot |y| + |y|^2$$

$$= \left(|x| + |y|\right)^2 .$$

$$\Downarrow$$

$$|x+y| \leq |x| + |y| \quad .$$

$\square$

ESEMPIO 1 Norma della convergenza uniforme.

$X = C([0,1]; \mathbb{R})$ funzioni continue su $[0,1]$

$\|\cdot\|_\infty : X \longrightarrow [0,\infty)$

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$$

$$= \max_{x \in [0,1]} |f(x)| . \leftarrow$$

In effetti $\|\cdot\|_\infty$ definisce una norma.

① ≥ 0 $\quad \|f\|_\infty = 0 \iff f = 0$.

② $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \, \|f\|_\infty$ facile

③ $$\|f+g\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) + g(x)|$$

$$\leq \sup_{x \in [0,1]} \left(|f(x)| + |g(x)| \right)$$

$$\leq \sup_{x \in [0,1]} |f| + \sup_{x \in [0,1]} |g| =$$

$$= \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

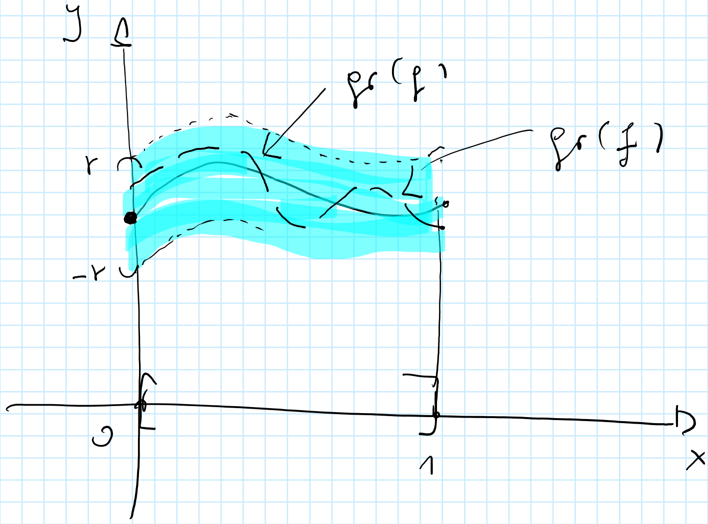
Quindi

$(X, \|\cdot\|_\infty)$ Spazio Normato $\longrightarrow$ Spazio Metrico

Fissiamo $f \in C([0,1])$ e $r > 0$.

La palla $B_r(f)$ contiene tutte le $g \in X = C([0,1])$

come in figura:



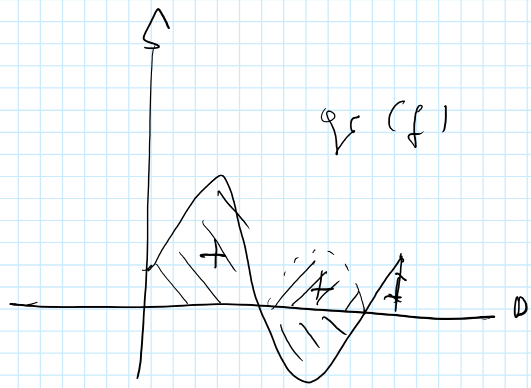
$g \in B_r(f) \iff$ il grafico di g è tutto contenuto (strettamente sopra e sotto) nella striscia azzurra.

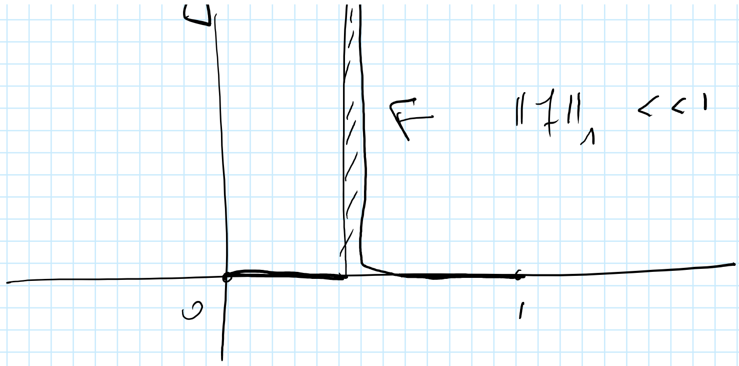
ES 2 $\quad X = C([0,1])$

Definiamo $\|\cdot\|_1 : X \to [0,\infty)$ così:

$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(x)|\, dx \geq 0$$

Norma $L^1([0,1])$





$F \quad \|f\|_1 << 1$ se l'area è piccola

ma $\|f\|_\infty >> 1$

LIMITI DI SUCCESSIONI E FUNZIONI CONTINUE IN UNO SM

(X, d) SM

Sia $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di elementi di X, $\quad x_n \in X \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

DEF Diciamo che $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X converge ad un elemento $x \in X$ nella distanza d se:

$$\lim_{n \to \infty} d(x_n, x) = 0.$$

Ovvero: $\quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq \bar{n}$ si ha:

$$d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Notazioni alternative:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x \quad \text{in } (X, d)$$

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{(X,d)} x .$$

Chiamiamo $x \in X$ il limite della succ. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

ESER. Se il limite esiste è unico.

DEF Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici e sia $f : X \to Y$.

Diciamo che f è cont. nel punto $x_0 \in X$ se: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tale che

$$d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y\left(f(x), f(x_0)\right) < \varepsilon,$$

$$x \in X$$

DEF Analogamente dati $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$ diciamo che

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ (\text{in } (X,d))}} f(x) = y_0$$

se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tale che

$$0 < d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y(f(x), y_0) < \varepsilon .$$