Lezione 12

martedì 28 marzo 2017 08:47

Continuazione su limiti e funz. continue

TEOREMA Siano $f : X \to Y$ X Y SM

e sia $x_0 \in X$.

Sono equivalenti le seguenti due affermazioni:

A) f è cont. nel punto x_0

B) Per ogni successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di punti in X tale che $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{(X, d_X)} x_0$

si ha che

$$f(x_n) \xrightarrow[n \to \infty]{(Y, d_Y)} f(x_0)$$

DIM Omessa

Ora consideriamo il caso $Y = \mathbb{R}$ (o $\mathbb{R}^n$, o $\mathbb{C}$)

e prendiamo funzioni $f : X \to \mathbb{R}$
d_X dist. Euclidea

TEOREMA (X, d_X) SM, $\mathbb{R}$ con dist. Euclidea

Siano poi $f, g : X \to \mathbb{R}$ due funzioni cont. in $x_0 \in X$.

Allora:

i) la funz. $f+g : X \to \mathbb{R}$ è cont. in x_0

ii) la funz. $f \cdot g : X \to \mathbb{R}$ è cont. in x_0

iii) se poi $f \neq 0$ su X allora la funzione $\frac{1}{f} : X \to \mathbb{R}$ è cont. in x_0

Dim OMESSA

Ora consideriamo $Y = \mathbb{R}^m$ con $\underline{\underline{m > 1}}$

Una $f : X \to \mathbb{R}^m$ sarà del tipo

$$f = (f_1, \dots, f_m)$$

con $f_1, \dots, f_m : X \to \mathbb{R}$ le coordinate.

con distanza euclidea

__TEOR__. Una funz. $f : X \to \mathbb{R}^m$ è cont. in un punto $x_0 \in X$ se e solo se le sue coordinate sono cont. in x_0

in $\mathbb{R}$
con la dist. standard

Commento:

$$|f(x) - f(x_0)| = \left(\sum_{i=1}^{m} |f_i(x) - f_i(x_0)|^2 \right)^{1/2} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$$

dist. in $\mathbb{R}^m$

dist. in $\mathbb{R}^m$

ESERCIZI

ES1 Sia $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione

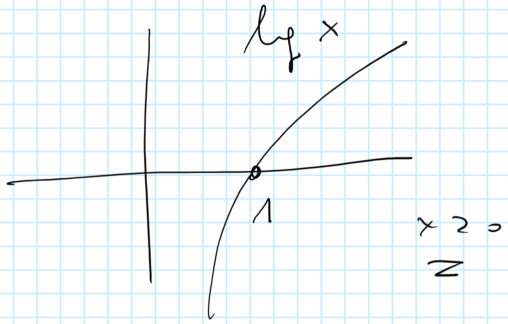
$$d(x,y) = \log(1 + |x-y|), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Provare che $(\mathbb{R}, d)$ è uno spazio metrico.

Soluzione

A1) $d(x,y) \geq 0 \ \forall x,y$; $d(x,y) = 0 \iff x = y$

- $d(x,y) = \log(1 + |x-y|) \geq \log 1 = 0$



- $d(x,y) = 0 \iff \log(1 + |x-y|) = 0$

$$\iff 1 + |x-y| = 1$$

$$\iff |x-y| = 0$$

$$\iff x = y.$$

A2) $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$

$$\| $$

$$\log(1+|x-y|) = \log(1+|y-x|) = d(y,x)$$

A3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \quad \forall x,y,z \in \mathbb{R}$

Dobbiamo verificare che

$$\log(1+|x-y|) \leq \log(1+|x-z|) + \log(1+|z-y|).$$

Sappiamo già che

- (*) $|x-y| \leq |x-z| + |z-y| \quad \forall x y z$

- $\log$ è strett. cresc.

Parto da qui:

$$1+|x-y| \leq 1+|x-z|+|z-y| \quad \underline{\underline{ok}}$$

$$\Downarrow \quad \log \uparrow$$

$$\log(1+|x-y|) \leq \log(1+\underbrace{|x-z|}_{=s}+\underbrace{|z-y|}_{=t})$$

VERO

VERO $\underbrace{}_{\substack{\| \\ s}}$ $\underbrace{}_{\substack{\| \\ t}}$

Mi rimane da verificare che

$$\log(1+s+t) \overset{?}{\leq} \log(1+s) + \log(1+t)$$

$$\Uparrow \qquad \forall\, s,t \geq 0$$

ORA

$$1+s+t \leq 1+s+t+\underset{\substack{\vee| \\ 0}}{s\cdot t} = (1+s)(1+t)$$

Quindi

$$\log(1+s+t) \leq \log\left[(1+s)(1+t)\right] =$$

$$= \log(1+s) + \log(1+t)$$

ok $\square$

ES 2 Determinare tutti i valori dei parametri reali $\alpha, \beta \geq 0$ tali che la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ così definita sia continua nel punto $(0,0) \in \mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^\alpha |y|^\beta}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \quad \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Sol. La prima cosa da fare è di esaminare la funzione nel fascio di rette

$$y = mx \qquad \text{con } m \in \mathbb{R}$$

Per m finito restringo f alla retta corrisp.
ovvero esamino $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\varphi(x) = f(x, mx)$$

e poi esamino $x \to 0$

$$\underset{x \neq 0}{\varphi(x)} = \frac{|x|^\alpha \, |mx|^\beta}{x^2 + m^2 x^2}$$

$$= \frac{|m|^\beta \, |x|^{\alpha+\beta}}{(1+m^2)\, |x|^2}$$

$$= \frac{|m|^\beta}{1+m^2} \, |x|^{\alpha+\beta-2}$$

Limite:

$$\lim \varphi(x) = \lim \frac{|m|^\beta}{1+m^2} \, |x|^{\alpha+\beta-2}$$

$$\lim_{x\to 0} \varphi(x) = \lim_{x\to 0} \frac{|m|}{1+m^2} \; |x|$$

$$= \begin{cases} 0 & \alpha+\beta-2>0 \\ +\infty \text{ oppure finito ma dipende da } m & \alpha+\beta-2\le 0 \end{cases}$$

Deduco che per $\boxed{\alpha+\beta\le 2}$ f

NON È CONT. nel punto x_0.

ORA provo che f è cont. se $\boxed{\alpha+\beta>2}$

Faccio stime basate sulla definizione di cont. Devo provare che

$$\lim_{|(x,y)-(0,0)|\to 0} f(x,y) = 0$$

??

$$= \lim_{\sqrt{x^2+y^2}\to 0} f(x,y) = 0.$$

$$0 \le f(x,y) = \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{x^2+y^2}$$

β

$$= \frac{\left((x^2)^{\frac{1}{2}}\right)^{\alpha} \left((y^2)^{1/2}\right)^{\beta}}{x^2+y^2} \leq$$

$$\leq \frac{(x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}} (x^2+y^2)^{\frac{\beta}{2}}}{x^2+y^2} =$$

$$= (x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}-1}$$

$$= \quad \frac{1}{\ } \quad \alpha+\beta-2)$$

se $\alpha+\beta > 2$

$$\downarrow \quad (x^2+y^2)^{1/2} \to 0$$

0

In modo più formale, fissato $\varepsilon > 0$

impongo la disug

$$0 \leq f(x,y) \leq (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}(\alpha+\beta-2)} < \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$d((x,y),(0,0)) = (x^2+y^2)^{1/2} < \varepsilon^{\frac{1}{\alpha+\beta-2}}$$

$\vdots$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \left(\delta = \varepsilon^{\frac{1}{\alpha+\beta-2}} \right) \text{ tale che}$$

$$d_{\mathbb{R}^2}((x,y),(0,0)) < \delta \implies d_{\mathbb{R}}(f(x,y),0) < \varepsilon$$

Conclusione

$$f \text{ è cont. in } (0,0) \iff \alpha + \beta > 2$$

Altro punto di vista.

Provo ad usare le coordinate polari:

$$x = r \cos\theta$$

$$y = r \sin\theta$$

$$d((x,y),(0,0)) = |(x,y)| = r \geq 0$$

Devo provare che

$$\lim_{r \to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta) = 0$$

in modo indipendente da θ

indipendente da ϑ

Conti:

$$0 \leq f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{|r\cos\theta|^{\alpha}\,|r\sin\theta|^{\beta}}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} =$$

$$= \frac{r^{\alpha+\beta}\,|\cos\theta|^{\alpha}\,|\sin\theta|^{\beta}}{r^2} \leq$$

$$\leq \frac{r^{\alpha+\beta}}{r^2} = r^{\alpha+\beta-2}$$

ho una quantità indipendente da ϑ

ORA se $\alpha+\beta-2>0$ $\longrightarrow$ $\xrightarrow{r\to 0^+} 0$

Questo prova che:

$$\alpha+\beta-2>0 \implies f \text{ è cont. in } 0.$$

ES.3 Stabilire se $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita nello è continua nel punto $(0,0) \in \mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Sol. Parto con il test delle rette:

$$y = mx \qquad m \in \mathbb{R}$$

e definisco

$$\varphi(x) = f(x, mx)$$

$x \neq 0$

$$= \frac{x^2 \cdot mx}{x^4 + m^2 x^2}$$

$$= \frac{x^3 \cdot m}{x^2 (x^2 + m^2)}$$

$$= \frac{x \cdot m}{x^2 + m^2} \qquad \forall m \in \mathbb{R}$$

$\lim \varphi(x) = \lim \frac{x\, m}{}$

$\forall m \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to 0} \varphi(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x \, m}{x^2 + m^2} = 0$$

Provo con un test nel fascio di parabole

$$y = \alpha x^2 \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

Guardiamo

$$\psi(x) = f(x, \alpha x^2)$$

$$= \frac{x^2 \cdot \alpha x^2}{x^4 + \alpha^2 x^4}$$

$$= \frac{x^4 \cdot \alpha}{x^4 (1 + \alpha^2)}$$

$$= \frac{\alpha}{1 + \alpha^2}$$

Dunque

$$\lim_{x \to 0} f(x, \alpha x^2) = \frac{\alpha}{1 + \alpha^2} \neq 0$$

se $\alpha \neq 0$

Conclusione:

f NON É cont. in $(0,0)$