Lezione 13

mercoledì 29 marzo 2017 10:30

Tutorato:

Me	29/03	17-19	Aula B	Canale 2
Gio	30/03	17-19	Aula B	Canale 1
Ve	31/03	15-17	Aula C	Can 1 e 2

Convergenza uniforme di successioni di funzioni

Sia X un insieme $(X = [0,1],\ X = \mathbb{R}$ o altro$)$

e siano $f_n : X \to \mathbb{R}$ funzioni, $n \in \mathbb{N}$,

$f : X \to \mathbb{R}$ funzione.

Diciamo che $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente ad f se

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in X$$

Equivalentemente

$$(*) \quad \lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0 \quad \underline{\underline{\forall x \in X}}$$

Equivalentemente:

$\forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \bar{n} \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq \bar{n}$ si ha

$\forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq \bar{n}$ si ha

(**) $$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon .$$

DEF Diciamo che la succ. di funzioni $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente ad f sull'insieme X se

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = 0 .$$

Equivalentemente (f_n) conv. unif. su X ad f se

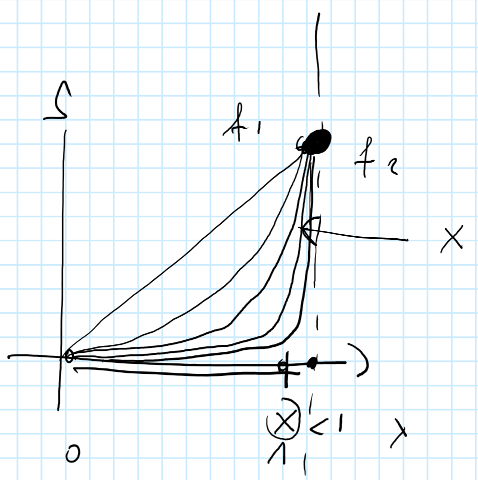
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq \bar{n} \quad \forall x \in X \quad \text{si ha}$$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon .$$

ESEMPIO $X = [0,1]$ (oppure $X = [0,1)$).

$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f_n(x) = x^n$$



Calcolo il limite puntuale

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} x^n = \begin{cases} 1 & x = 1 \end{cases}$$

$$n \to \infty \qquad\qquad n \to \infty \qquad\qquad \begin{cases} \\ 0 & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

Dunque il limite puntuale della successione è la funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = 1 \\ 0 & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

Affermo che la succ. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ <u>NON</u> converge uniformemente ad f su $[0,1]$ (e neppure su $[0,1)$). Considero:

$$\boxed{\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)|} =$$

$x = 1 \quad 1^n - 1 = 0$

oppure $x \in [0,1)$

$$= \sup_{x \in [0,1)} |x^n - 0|$$

$$= \sup_{x \in [0,1)} x^n$$

$$= \boxed{1} \qquad \boxed{\forall n \in \mathbb{N}}$$

Constato che

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1)} \left| f_n(x) - f(x) \right| = 1 \neq 0$$

Quindi non c'è conv. uniforme su $[0,1)$.

Fisso $0 \leq \delta < 1$. Dico che c'è CU nell'intervallo $[0,\delta]$. Infatti

$$\circledast \quad \sup_{x\in[0,\delta]} \left| f_n(x) - f(x) \right| =$$

$$= \sup_{x\in[0,\delta]} x^n = \delta^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 .$$

TEOR Sia (X,d) uno spazio metrico, sia $x_0 \in X$, e siano $f_n, f : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, funzioni tali che:

i) $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ uniformemente su X

ii) Ogni f_n è continua nel punto x_0.

Tesi: Anche la funzione f è continua nel punto x_0.

COR Quindi il limite uniforme di funzioni continue è una funzione continua.

DIM del Teor.: Voglio provare che f è cont. nel punto x_0.

Fisso $\varepsilon > 0$. Per la CU $\exists\, \bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq \bar{n}$:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in X$$

Scelgo ora a mio piacere un $n \geq \bar{n}$

Siccome f_n è cont. in x_0:

$$\exists\, \delta > 0 \text{ tale che } d(x, x_0) < \delta \quad (*)$$

$$\Downarrow$$

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Metto insieme le informazioni per concludere che:

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0)$$

$$+ f_n(x_0) - f(x_0)|$$

$$\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| +$$

$$\leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{< \varepsilon \ \forall x \text{ per la CU}} + \underbrace{|f_n(x) - f_n(x_0)|}_{< \varepsilon \text{ se } d(x,x_0)<\delta} + \underbrace{|f_n(x_0) - f(x_0)|}_{< \varepsilon}$$

Concludo: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tale che

$$d(x,x_0) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < 3\varepsilon .$$

$\square$

ESERCIZIO 1 Sia $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \frac{n^2 \sin\left(\frac{x}{n^2}\right)}{1 + n^2 x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1) Calcolare il limite puntuale

2) Provare che
$$|f_n(x)| \leq \frac{|x|}{1 + x^2 n^2} \quad \forall n \ \forall x$$

3) Studiare la CU della successione.

SOL

(1)
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \sin\left(\frac{x}{n^2}\right)}{1 + n^2 x^2} = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \quad 1 + n^2 x^2 \qquad \Big(\quad 0 \qquad x \neq 0$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{x}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2} + x^2} = 0$$

Dunque

$$\underset{\forall x}{0} = f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

(2) Provo che

$$|f_n(x)| \leq \frac{|x|}{1 + x^2 n^2} \qquad \forall x \ \forall n$$

Infatti

$$\left| \frac{n^2 \sin\left(\frac{x}{n^2}\right)}{1 + n^2 x^2} \right| \leq \frac{n^2}{1 + n^2 x^2} \left| \frac{x}{n^2} \right| = \frac{|x|}{1 + n^2 x^2}$$

$$|\sin(t)| \leq |t| \qquad \forall t$$

(3) Devo capire "con precisione" per quali insiemi $X \subset \mathbb{R}$ si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x \in X} |f_n(x)| \overset{?}{=} 0$$

$\nwarrow$ per quali $x \in \mathbb{R}$.

1^ Possibilità. Mi studio il min/max della funzione [per n fissato]

$$f_n(x) = \frac{n^2 \sin\left(\frac{x}{n^2}\right)}{1+n^2x^2} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

2^ Possibilità. Sfrutto la stima al punto ②

$$\left| f_n(x) \right| \le \frac{|x|}{1+n^2x^2} = g_n(x)$$

Dove $g_n \to 0$ Unif $\Rightarrow$ li pure $f_n \to 0$ unif.

Studio $g_n(x)$ per $x \geq 0$.

Derivata di g_n

$$g_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$$

$$g_n'(x) = \frac{1+n^2x^2 - x \cdot 2n^2 x}{(1+n^2x^2)^2}$$

$$= \frac{1 - n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}$$

Studio la diseq.:

$$f_n'(x) \geq 0 \iff 1 - n^2 x^2 \geq 0$$

$$\iff n^2 x^2 \leq 1 \qquad\qquad x \geq 0$$

$$\iff (0 \leq) x \leq \frac{1}{n}$$

Dunque $x = 1/n$ è il p.to unico di max assoluto

Dunque

$$\sup_{x \geq 0} |f_n(x)| = \max_{x \geq 0} f_n(x)$$

$$= f_n\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{\frac{1}{n}}{1+1} = \frac{1}{2n}$$

Chiaramente

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = 0$$

$$\Downarrow$$

$$f_n \underset{n \to \infty}{\overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows}} 0 \qquad \Leftarrow \quad f_n \text{ CU su tutto } \mathbb{R} \text{ a } f \equiv 0$$

Per confronto:

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{R}} 0$$

$\square$

<u>ES 2</u> Studiare la convergenza puntuale e uniforme della succ. di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\log\left(x^{2n} + n^{2x}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Soluzione.

Incomincio a studiare il caso $x^2 < 1$

$-1 < x < 1$

Il limite puntuale è

$$\frac{2x\log(n)}{n} \le \frac{\log\left(x^{2n} + n^{2x}\right)}{n} \le \frac{\log\left(1 + n^{2x}\right)}{n}$$

$$\frac{2x\log(n)}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0, \qquad \frac{\log\left(x^{2n} + n^{2x}\right)}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0, \qquad \frac{\log\left(1 + n^{2x}\right)}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Quindi

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \qquad -1 < x < 1$$

Scrivo le stime migliorate sempre con $-1 < x < 1$

$$\underbrace{-2\,\frac{\log n}{n}}_{\substack{\downarrow\ n\to\infty \\ 0}} \le \frac{\log\left(x^{2n}+n^{2x}\right)}{n} \le \underbrace{\frac{\log\left(1+n^{2}\right)}{n}}_{\substack{\downarrow\ n\to\infty \\ 0}}$$

Questo vuol dire che

$$\lim_{n\to\infty}\ \sup_{-1<x<1}\left|\frac{\log\left(x^{2n}+n^{2x}\right)}{n}\right| = 0$$

Conclusione: c'è CU in $\underline{\underline{[-1,1]}}$

a $0 = f$ limite

Ora studiamo la convergenza per $x^2>1$ ovvero per $x<-1$ e $x>+1$.

<u>Conto:</u>

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\log\left(x^{2n}+n^{2x}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\log\left(x^{2n}\left[1+\frac{n^{2x}}{x^{2n}}\right]\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left[\log x^{2n} + \log\left(1+\frac{n^{2x}}{x^{2n}}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{n}\, n \log x^2 + \frac{1}{n}\log\left(1+\frac{n^{2x}}{x^{2n}}\right)$$

$$= \log x^2 + \underbrace{\frac{1}{n}\log\left(1+\frac{n^{2x}}{x^{2n}}\right)}_{\substack{\downarrow \\ 0}} \quad \begin{matrix} n \to \infty \\ x < -1 \end{matrix}$$

- Se $x < -1$

$$\frac{n^{2x}}{x^{2n}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Quindi

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \log x^2 \qquad x < -1$$

- Se $x > 1$

$$0 < \underbrace{\frac{1}{n}\log\left(1+\frac{n^{2x}}{x^{2n}}\right)} \leq \frac{1}{n}\log\left(1+n^{2x}\right)$$

$$\leq \log\left(2n^{2x}\right)$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\substack{\downarrow\, n\to\infty \\ 0}} \leq \lg\left(2n^{2x}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(\lg 2 + \lg n^{2x}\right)$$

$$= \underbrace{\frac{\lg 2}{n}}_{\substack{\downarrow \\ 0}} + 2x\,\underbrace{\frac{\lg n}{n}}_{\substack{\downarrow \\ 0}}$$

Dunque

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \log x^2 \qquad \forall\, x^2 \geq 1$$