Lezione 14

lunedì 3 aprile 2017 10:28

ESERCIZIO

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \log\left(x^{2n} + n^{2x}\right) \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & |x| \leq 1 \\ \log x^2 & |x| > 1 \end{cases}$$

Poi

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{|x|\leq 1} |f_n(x)| = 0 \quad (*)$$

CU su $[-1, 1]$.

Studio il caso $x < -1$ $(x \leq -1)$

la differenza

$$0 \leq f_n(x) - f(x) = \underbrace{\frac{1}{n} \log\left(x^{2n} + n^{2x}\right) - \log x^2}_{\geq} = g_n(x)$$

Voglio studiare la monotonia di $g_n$.

La sua derivata è

$$g_n'(x) = 2\frac{1}{n} \frac{n x^{2n-1} + n^{2x} \cdot \log n}{x^{2n} + n^{2x}} - 2\frac{1}{x}$$

$$= 2\,\frac{\cancel{n x^{2n}} + x\, n^{2x} \lg n - \cancel{n x^{2n}} - n^{2x+1}}{n x (x^{2n} + n^{2x})}$$

$x \leq -1$

$$= 2\,\frac{n^{2x} \overbrace{\left( x \lg n - n \right)}^{\leq 0}}{\underbrace{n x ( x^{2n} + n^{2x} )}_{\leq 0}}$$

$\geq 0 \quad \forall\, x \leq -1$

$f_n \geq 0$ e $f_n \uparrow$ su $(-\infty, -1]$.

Dunque

$$\sup_{x \leq -1} \underbrace{f_n(x)}_{\geq 0} = f_n(-1) = \underbrace{f_n(-1) - \overset{0}{f(-1)}}_{\substack{\downarrow\, n \to \infty \\ 0}}$$

Dunque

$f_n \overset{(-\infty, -1]}{\underset{n \to \infty}{\rightrightarrows}} f$ qui c'è $\underline{\underline{CU}}$.

ORA studio la CU nell'intervallo $[1, \infty)$

la differenza è

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \log\left(x^{2n} + n^{2x}\right) - \log x^2$$

$$= \frac{1}{n} \log\left[x^{2n}\left(1 + \frac{n^{2x}}{x^{2n}}\right)\right] - \log x^2$$

$$= \frac{1}{\cancel{n}} \cancel{n} \cancel{\log x^2} + \frac{1}{n} \log\left(1 + \frac{n^{2x}}{x^{2n}}\right) - \cancel{\log x^2}$$

$$= \frac{1}{2} \log\left(1 + \boxed{\frac{n^{2x}}{x^{2n}}}\right) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$$

$$\frac{n^{2x}}{x^{2n}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$$

Quindi

$$\sup_{x \geq 1} \left| f_n(x) - f(x) \right| = +\infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

NON C'È CU su tutta la semiretta $[1, \infty)$

ORA fisso $M > 1$ arbitrario

(ma bloccato). Studio la CU su $[1, M]$

Studio

$$\underbrace{\sup_{x\in[1,M]} |f_n(x) - f(x)|}_{= f_n(x)} \xrightarrow[n\to\infty]{?} 0$$

Conti sopra.

$$f_n'(x) = \frac{2n^{2x}\,(x\log n - n)}{n\,\underset{>0}{x}\,\underline{(x^{2n} + n^{2x})}}$$

?? No

$$f_n'(x) \geq 0 \iff x\log n - n \geq 0$$

Sto prendendo $x \leq M$. Dunque

$$x\log n - n \leq \boxed{M\log n - n} < 0$$

$\xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$

VERO definitivamente in $n$

Quindi definitivamente in $n$

$$0 < f_n \quad e \quad f_n \downarrow \quad su \quad \underline{[1, M]}$$

Dunque definitiv:

$$\sup |f_n(x) - f(x)| = f_n(1) - \overset{0}{f(1)}$$

$x \in [1, M]$

$$\Big\downarrow \; n \to \infty$$

$$0$$

Concludo che: $\forall \underline{\underline{M \geq 1}}$ :

$$f_n \overset{[1,M]}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} f = \lg x^2$$

c'è CU su $[1, M]$ $\forall M > 1$.

$\square$

<u>ESERCIZIO</u> Siano $g_n$ e $h_n$ le reg. succ. di funzioni

$$g_n(x) = \operatorname{arctg}(nx) \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$h_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \qquad x \in \mathbb{R}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$

e lei si consideri il prodotto

$$f_n = g_n \cdot h_n \qquad n \in \mathbb{N}.$$

1) Calcolare il limite puntuale

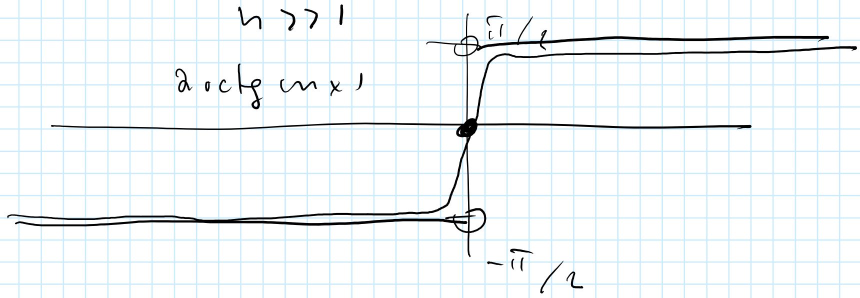
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad x \in \mathbb{R}$$

2) Studiare la CU di $g_n$ e $h_n$

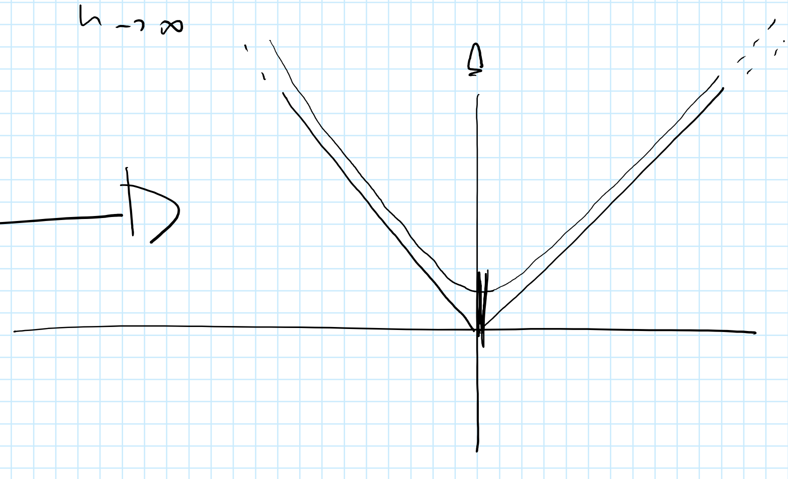
3) Studiare la CU di $f_n$.

Sol (1) Limiti puntuali

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg}(nx) = \begin{cases} \pi/2 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -\pi/2 & x<0 \end{cases}$$




$$\lim_{n\to\infty} h_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{x^2+\frac{1}{n}} = \sqrt{x^2} = |x|$$

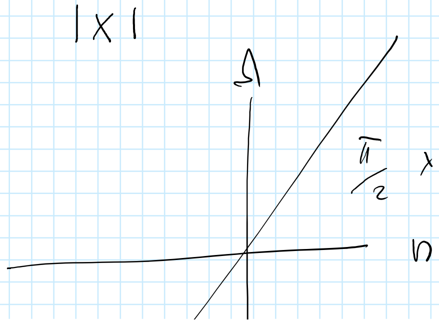


Dunque

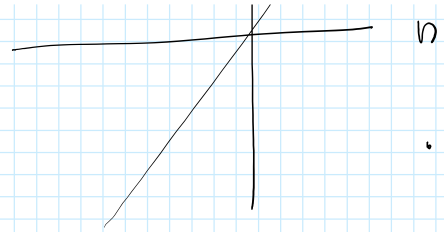
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)\, h_n(x)$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sgn}(x) \cdot |x|$$

$$= \frac{\pi}{2}\, x$$



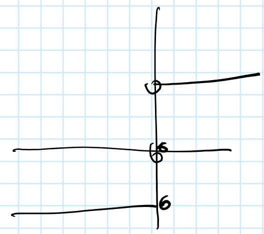
$$= \frac{\pi}{2}\, x$$




(2) Studio la CU di $f_n(x) = \operatorname{arctg}(nx)$ ← SONO CONTINUE

Vedo subito che $f_n$ NON converge unif. su $\mathbb{R}$ perché il limite

$$f_\infty(x) := \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(x)$$



NON è una funzione cont.

Più precisamente $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>NON</u> converge uniformemente su nessun intervallo del tipo $[-\delta,\delta]$ con $\delta>0$.

Studio la CU su $|x|\geq\delta$ con $\delta>0$ fissato. Infatti ad es. per $x\geq\delta$:

$$\sup_{x\geq\delta}\left|f_n(x)-\frac{\pi}{2}\right| = \sup_{x\geq\delta}\left(\frac{\pi}{2} - \underset{\uparrow\, x}{\boxed{\operatorname{arctg}(nx)}}\right)$$

$$= \underbrace{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}(n\delta)}_{\xrightarrow{n\to\infty}\ 0\quad(\delta>0)}$$

Quindi c'è CU su

$$\{x\in\mathbb{R} : |x|\geq\delta\}$$

$\forall\,\delta>0$.

Studio la CU di

$$h_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

Devo studiare la differenza

$$\left| h_n(x) - |x| \right| = \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x| \right|$$

$$= \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{|x|^2}$$

$$= \frac{\cancel{x^2} + \frac{1}{n} - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{x^2}}$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\boxed{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{x^2}}} \geq 1$$

$\forall x \in \mathbb{R}$

$$\leq \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}}} = \sqrt{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

Quindi $h_n \overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} |x|$.

Quindi $h_n \overset{}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} |x|$.

③ CU di $f_n = g_n \cdot h_n$:

compito per casa.

$\square$

# Altri teoremi sulla conv. uniforme

<u>TEOR</u> Sia $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, una successione di funzioni derivabili su $[0,1]$.

Supponiamo che:

i) Esiste un $x_0 \in [0,1]$ tale che $(f_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

ii) Le derivate $(f_n')_{n \in \mathbb{N}}$ convergono uniformemente ad una funzione $g : [0,1] \to \mathbb{R}$.

Allora esiste una funzione derivabile $f : [0,1] \to \infty$ tale che $f_n \overset{[0,1]}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} f$ e inoltre:

$$\frac{d}{dx} f(x) = \left[ \frac{d}{dx} \left( \lim_{n\to\infty} f_n(x) \right) \right] \qquad x \in [0,1]$$

$$\lim \frac{d}{} f_{..}(x).$$

$n \to \infty$ $\quad dx$ $\quad f_n$

**COROLLARIO** Se le derivate convergono uniformemente allora sono scambiabili fra loro le operazioni di limite e derivata.

DIM omessa

**TEOR** Sia $f_n \in \mathcal{R}([0,1])$, $n \in \mathbb{N}$, una succ. di funzioni Riemann integrabili su $[0,1]$.

Se $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{[0,1]} f$ ( conv. unif. ad $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ )

allora vale $f \in \mathcal{R}([0,1])$ e si ha:

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty}}\ \underbrace{\int_0^1} f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx .$$

$$\left( = \int_0^1 \underbrace{\lim f_n(x)}\,dx \right)$$

DIM. (omessa)

In questi teoremi l'intervallo $[0,1]$ può essere ricoprimento con un qualsiasi altro intervallo

(chiuso e limitato).

## SERIE DI FUNZIONI

Sia $A \subset \mathbb{R}$ oppure $A \subset \mathbb{C}$ $A \neq \emptyset$

Sia poi $f_n : A \to \mathbb{R}$ (in $\mathbb{C}$), $n \in \mathbb{N}$, una succ. di funzioni reali o complesse

Posso formare la successione delle somme parziali

$$S_n = f_1 + f_2 + \dots + f_n$$

$$S_n : A \to \mathbb{R}$$

DEF Diciamo che la serie di funzione

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

Converge puntualmente su $A$ se $\forall x \in A$ converge la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) := \lim_{n\to\infty} S_n(x)$$

(ovvero se la succ. delle somme parziali converge puntualmente).

Se poi la successione delle somme parziali

$(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente su $A$,
allora diremo che la serie di funz.

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

converge uniformemente su $A$.