Lezione 15

martedì 4 aprile 2017 08:46

TEOREMA (Criterio di Weierstrass)

Sia $f_n : A \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, una successione di funzioni su $A \subset \mathbb{R}$ oppure $A \subset \mathbb{C}$ (a valori in $\mathbb{R}$ oppure $\mathbb{C}$).
Supponiamo che esista una successione reale $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tale che

- $$\sup_{x \in A} |f_n(x)| \le a_n \quad (=: a_n)$$
- $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty .$$

Allora la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \qquad x \in A,$$

converge uniformemente su A.

Dim. Intanto la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

converge assolutamente in ogni punto $x \in A$ fissato:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \le \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$$

converge

converge.

Dobbiamo provare che le somme parziali

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x), \qquad x \in A,$$

convergono unif. al loro limite

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

Ovvero: $\underline{\forall \varepsilon > 0}$ $\underline{\underline{\exists \bar{n} \in \mathbb{N}}}$ $\underline{\underline{\forall n \geq \bar{n}}}$ si ha

$$\sup_{x \in A} \left| S_n(x) - S(x) \right| \leq \varepsilon$$

Ma

$$\left| S_n(x) - S(x) \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) - \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right|$$

$$= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right|$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \left| f_k(x) \right|$$

$\forall x \in A$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \leq \varepsilon$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n}$ $\forall n \geq \bar{n}$

$\forall n \geq \bar{n}$

perché

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty$$

e quindi

$$\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

$$\forall n \geq \bar{n}.$$

$\square$

DEF. Diciamo che la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad x \in A,$$

converge totalmente se converge la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in A} |f_n(x)| < \infty.$$

OSS Crit. di Weierstr.:

Convergenza totale $\Rightarrow$ Convergenza uniforme.

ESEMPIO Consideriamo la serie di funzioni (potenze) in campo complesso:

$$s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad z \in A = \{ z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \}$$

Voglio vedere se c'è CU su A oppure su qualche sottoinsieme di A.

Sappiamo su

$$S(z) = \frac{1}{1-z}$$

e le somme parziali sono

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$$

Consideriamo

$$S_n(z) - S(z) = \frac{1-z^{n+1}}{1-z} - \frac{1}{1-z}$$

$$= \frac{-z^{n+1}}{1-z}$$

Quindi

$$\left| S_n(z) - S(z) \right| = \left| \frac{-z^{n+1}}{1-z} \right|$$

$$= \frac{|z|^{n+1}}{|1-z|}$$

Dunque

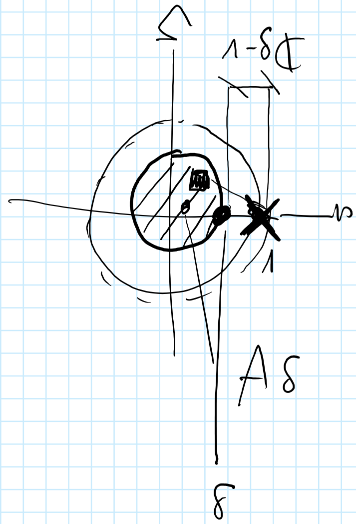
$$\sup_{z \in A} \left| S_n(z) - S(z) \right| = \sup_{|z|<1} \frac{|z|^{n+1}}{|1-z|} = +\infty \quad \forall n$$

$A = \{ |z| < 1 \}$

e perciò NON c'è CU su tutto $A = \{ |z| < 1 \}$

Fisso $0 < \delta < 1$ e considero

$$A_\delta = \{ z \in A : |z| \le \delta \}$$



Affermo che su A_δ c'è $\underline{\underline{CU}}$.

Infatti

$$\boxed{\sup_{\substack{z\in A_\delta \\ |z|\le\delta}}} |S_n(z) - S(z)| = \sup_{|z|\le\delta} \frac{|z|^{n+1}}{|1-z|}$$

$$\le \delta^{n+1} \sup_{|z|\le\delta} \frac{1}{|1-z|} \le \frac{\delta^{n+1}}{1-\delta} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$||1-z|| \ge 1-\delta$$

$$\frac{1}{|1-z|} \le \frac{1}{1-\delta} \quad \forall z \in A_\delta$$

Alternativamente col crit. di Weir.

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

Ma

$$\sup_{|z|\le\delta<1} |z^n| = \sup_{|z|\le\delta} |z|^n \le \delta^n \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n < \infty$$

□

Due fatti sulle serie

$\underline{\text{TEOREMA}}$ Sia $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, una successione di funzioni e sia $x_0 \in [0,1]$.

Allora:

(1) Se ogni f_n è cont. in x_0 e la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente su $[0,1]$, allora la funzione

$$x \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad \text{è continua nel punto } x_0$$

In particolare:

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x)}.$$

(2) Supponiamo che le f_n siano derivabili su $[0,1]$ e che:

- $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge puntualmente
- $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ converge <u>uniformemente</u>.

Allora la funzione

$$x \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

è <u>derivabile</u> su $[0,1]$ e inoltre è derivabile su $[0,1]$ e inoltre

$$\boxed{\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} f_n(x) . \quad x \in [0,1]}$$

ESERCIZIO Studiare la converg. puntuale e uniforme della seguente serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+n^2 x)\, e^{-nx}}{1+n^2} , \quad x \geq 0$$

Risoluzione. Termine generale ≥ 0.

Poi ho certamente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+n^2 x)\, e^{-nx}}{1+n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x\, e^{-nx}}{1+n^2}$$

e quindi la serie data converge se e solo se convergono le due serie.

Studio la prima serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \boxed{\underbrace{\frac{e^{-nx}}{1+n^2}}_{\leq 1}} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} < \infty$$

$$\forall x \geq 0$$

Quindi per il crit. di W. questa serie converge uniformemente su $[0, \infty)$.

Ora passo a studiare il 2° contributo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x\, n^2\, e^{-nx}}{1+n^2}, \qquad x \geq 0.$$

Studio la conv. puntuale

- $x = 0 \to \sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0$

  Qui c'è CP

- $x > 0$. Con il crit. della radice trovo:

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{x\, n^2\, e^{-nx}}{1+n^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt[n]{x}}_{\xrightarrow{n\to\infty} 1} \cdot \underbrace{\sqrt[n]{\frac{n^2}{1+n^2}}}_{\xrightarrow{n\to\infty} 1} \cdot e^{-x}$$

$$= e^{-x} < 1 \quad \text{per } x > 0$$

Dunque per il Crit. Radice la serie converge anche $\forall x > 0$.

Alternativamente:

$$0 \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x \, \cancel{n^2} \, e^{-nx}}{\underbrace{1+n^2}_{}} \leq \sum_{n=0}^{\infty} x \, e^{-nx} = \qquad x > 0$$

≥ 0

$$= x \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{e^x}\right)^n \quad \boxed{< \infty} \quad x > 0$$

$$= x \frac{1}{1 - \frac{1}{e^x}}$$

$$= x \frac{e^x}{\underbrace{e^x - 1}_{}} \quad , \quad \underline{x > 0}$$

Dunque per il Crit. del Confronto la serie converge anche $\forall x > 0$.

Adesso devo dire se la serie data (in particolare il 2° contributo) converge uniformemente.

Cerco di provare che la seconda serie converge uniformemente per $x \geq \delta > 0$

con $\delta > 0$ arbitrario ma finito.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x\, n^2 e^{-nx}}{1+n^2} \leq \sum_{n=0}^{\infty} x\, e^{-nx} \leq$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} x\, e^{-n\delta}$$

$$x \geq \delta \Rightarrow e^{-nx} \leq e^{-n\delta}$$

Suppongo anche che $x \leq M$ con $M > 0$ grande arbitrario ma finito

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} M e^{-n\delta} < \infty$$

Ho scoperto che

$$\sup_{0<\delta\leq x\leq M} \frac{x\, n^2 e^{-nx}}{1+n^2} \leq M e^{-n\delta} := a_n$$

$$\text{con } \sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$$

Quindi per il Crit. di W. sono sicuro che la serie conv. unif. su intervalli del tipo $[\delta, M]$ con $\delta > 0$, $M > 0$.

Rimangono 2 domande:

① c'è CU in (M, ∞) ? ⊛

② c'è CU in $[0, \delta]$, $\delta > 0$?

Dimostro ①: Studio la CU su $(M, \infty]$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x\, n^2 e^{-nx}}{1+n^2} \le \sum_{n=1}^{\infty} x\, e^{-nx}$$

Sia $f_n(x) = x\, e^{-nx}$

Studio:

$$f_n'(x) = e^{-nx} + x\, e^{-nx} \cdot (-n)$$

$$= e^{-nx} \left(1 - nx \right)$$

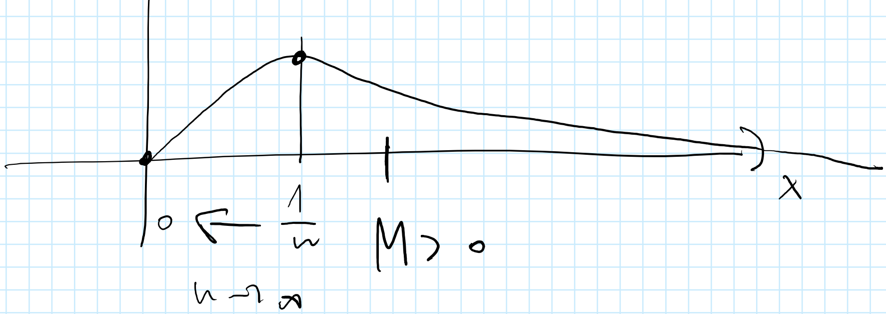
$$f_n'(x) \geq 0 \iff 1 - nx \geq 0 \qquad x > 0$$

$$\iff x \le \frac{1}{n}$$

Dunque

$$\sup_{x \in [M, \infty)} f_n(x) = f_n(M)$$

definitiv. $\frac{1}{n} < M$



e dunque $$\sum_{n=\bar{n}}^{\infty} \sup_{x \geq M} f_n(x) \leq \sum_{n=\bar{n}}^{\infty} f_n(M) < \infty$$

Ho ottenuto questa conclusione:
la serie converge uniformemente su intervalli del tipo

$$[M, \infty) \qquad \forall M > 0$$

(2) Studio CU su $[0, \delta]$, $\delta > 0$.

Il conto fatto sopra mi dice che:

$$\sup_{x \in [0, \infty)} f_n(x) = g_n\left(\frac{1}{n}\right) \qquad f_n(x) = x e^{-nx}$$

$$= \frac{1}{n} \cdot e^{-1}$$

Ma la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-1} = +\infty$$

Dunque non posso usare il Criterio di Weierstrass.

Riparto da capo

$$\sum^{\infty} x \, n^2 e^{-nx}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x\, n^2\, e^{-nx}}{1+n^2}$$