Lezione 16

mercoledì 5 aprile 2017 10:29

Termine esercizio:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \, x \, e^{-nx}}{n^2+1}, \quad x \geq 0.$$

Voglio studiare la CU su intervalli del tipo $[0, \delta]$, con $\delta > 0$.

ORA:

$$f(0) = 0$$

Se ci fosse CU su $[0,\delta]$ allora f dovrebbe essere continua nel punto $x = 0$.

Prendo $x > 0$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{n^2}{n^2+1}}_{\geq \frac{1}{2}} \cdot x \, e^{-nx} \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} x \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} =$$

$$= \frac{x}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e^x}\right)^n$$

$$= \frac{x}{2} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{e^x}} - 1 \right)$$

$$= \frac{x}{2} \left(\frac{e^x}{e^x - 1} - 1 \right)$$

$$\cancel{e^x} - \cancel{e^x} + 1$$

$$= \frac{x}{2} \frac{\cancel{e^x} - \cancel{e^x} + 1}{e^x - 1}$$

$$= \frac{x}{2} \underbrace{\frac{1}{e^x - 1}}, \quad x > 0$$

Ma

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{2} \frac{1}{e^x - 1} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{2} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{2}$$

Quindi <u>NON</u> può essere

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 = f(0).$$

$\Rightarrow$ f NON cont. in $x = 0$

$\Downarrow$

la serie NON CONV. Unif su $[0, \delta]$.

$\square$

SERIE DI POTENZE

Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una succ. di numeri complessi

Poi sia $z_0 \in \mathbb{C}$ fissato.

Una serie di funzioni del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n, \quad z \in \mathbb{C}$$

$$a_n \cdot (z - z_0) \quad , \quad z \in \mathbb{C}$$
$n=0$

si dice serie di potenze complessa (centrata nel punto z_0).

Per semplicità consideriamo il caso $z_0 = 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad , \quad z \in \mathbb{C} .$$

TEOR (Criterio di Cauchy - Hadamard).

Sia

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

una serie di pot. complesse e definiamo $R = [0, \infty]$ nel seguente modo

$$\frac{1}{R} := \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} .$$

Allora:

(1) La serie di potenze converge assolutamente in ogni punto z del disco complesso $\{ z \in \mathbb{C} : |z| < R \}$

Ovvero:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \, |z|^n < \infty \quad \text{per} \quad |z| < R$$

(2) Per ogni $0 < \rho < R$ la serie

di potenze converge uniformemente sul disco chiuso

$$A_\rho = \{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq \rho \}$$

(3) Se $|z| > R$ la serie di potenze NON CONVERGE in $\mathbb{C}$.

Il numero R si dice Raggio di Convergenza della serie.

<u>Commento</u>: Se $|z| = R$ la serie può sia convergere che non convergere.

<u>Dim</u>. (1) Studio la converg. della

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \, |z|^n$$

Col criterio della Radice:

$$L = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n| \, |z|^n}$$

$$= |z| \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

$$= \frac{|z|}{R}$$

Per il crit. della Radice:

$$L = \frac{|z|}{R} < 1 \implies$$ Serie Converge (assolutamente)

$$\Updownarrow$$

$$|z| < R$$

(2) $0 < \delta < R$ $\quad A_\delta = \{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq \delta \}$

Uso il Crit. di Weierstrass:

$$\sup_{z \in A_\delta} |a_n z^n| = \sup_{z \in A_\delta} |a_n| \, |z|^n =$$

$$= |a_n| \sup_{z \in A_\delta} |z|^n = |a_n| \, \delta^n$$

MA

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \, \delta^n < \infty$$ perché $\delta < R$

$$\xRightarrow{\text{Crit. Weier.}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$ Conv. Unif. su A_δ $\forall \delta < R$.

(3) Se $|z| > R$ allora

$$L = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n| \, |z|^n} = \frac{|z|}{R} > 1$$

Allora la dim. del criterio della Radice mi informa del fatto che

$$a_n z^n \not\xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

e quindi la serie non può convergere.

ESERCIZIO Al variare del parametro reale $\alpha \geq 0$

si consideri

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n z^n}{n^\alpha + 1}$$

i) Calcolare il Raggio di Conv. della serie

ii) Discutere la convergenza della serie nei punti $z \in \mathbb{C}$ dove $|z| = R$

iii) Discutere la convergenza totale e uniforme.

Risoluzione

i) $$\frac{1}{R} = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$ dove $$a_n = \frac{n}{n^\alpha + 1}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{n}{n^\alpha + 1}} \qquad \alpha \geq 0$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n^\alpha + 1}} = 1$$

$\sqrt[n]{n} \to 1$

$\sqrt[n]{n^\alpha+1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$

$$\underset{n \to \infty}{\ } \downarrow 1$$

$\Rightarrow \quad R = 1$

Per il teor. di C-H avrò:

Conv. uniforme su $A_\delta = \{ |z| \leq \delta \}$

$\forall \delta < 1$

ii) Sia ora $|z| = 1$ cioè $z = e^{i\vartheta}$ $\vartheta \in [0, 2\pi)$

La serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \, e^{in\vartheta}}{n^{\alpha} + 1}$$

Per $\alpha > 2$ posso ragionare così:

$$\left| \frac{n \, e^{in\vartheta}}{n^{\alpha} + 1} \right| \overset{\forall \vartheta}{=} \frac{n}{n^{\alpha} + 1} \leq \frac{n}{n^{\alpha}} = \frac{1}{n^{\alpha - 1}}$$

e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1}} < \infty$ perché $\underline{\alpha > 2}$

Per $\alpha > 2$ c'è CU su $\{ |z| = 1 \}$

Con conti analoghi:

$\alpha > 2 \quad \Rightarrow$ la serie conv. unif. su $\{ |z| \leq 1 \}$

Continuiamo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\vartheta}}{n^{\alpha} + 1} \qquad \boxed{\vartheta \in [0, 2\pi)}$$

ORA! se $\alpha \leq 1$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{n^{\alpha}+1} e^{in\theta} \neq 0$$

non esiste

La serie NON converge per nessun $\theta \in [0, 2\pi)$ se $\alpha \leq 1$

Rimane il caso $1 < \alpha \leq 2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^{\alpha}+1} \boxed{e^{in\theta}}$$

• $\theta = 0 \Leftrightarrow z = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^{\alpha}+1} \quad \text{Converge}$$

CCA

$\Updownarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1}} \quad \text{Converge}$$

MA lei diverge

• $\theta = \pi \to e^{in\theta} = \left(e^{i\pi}\right)^{n}$

$= (-1)^{n}$

$\alpha - 1 \leq 1$

$\Updownarrow$

$\alpha \leq 2$

$$= (-1)^n \qquad \qquad \alpha \leq 2$$

La serie è

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^\alpha+1} (-1)^n$$

$\frac{n}{n^\alpha+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ poiché $\alpha > 1$

e inoltre è decrescente

(conti omessi).

- In effetti la serie converge $\forall\ \alpha \in (0, 2\pi)$.

ESERCIZIO Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e si consideri

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+n^\alpha)}{\sqrt{n}} z^n$$

i) Calcolare il Raggio di conv.

ii) Studiare la convergenza nei punti $|z| = R$

iii) Discutere la conv. totale e uniforme.

Risoluzione

i) $$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \qquad a_n = \frac{\log(1+n^\alpha)}{\sqrt{n}} \geq 0$$

$$\sqrt[n]{\frac{\log(1+n^\alpha)}{}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\log(1+n^\alpha)}{\sqrt{n}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{\log(1+n^\alpha)}}{\sqrt[n]{\sqrt{n}}} = 1$$

Limiti

- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\sqrt[n]{n}}$

$$= \sqrt{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}} = \sqrt{1} = 1$$

- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\log(1+n^\alpha)} =$

$\alpha \geq 0$ $\qquad \log(1+x) \leq x$

$$\sqrt[n]{\log(2)} \underset{n\geq 1}{\leq} \sqrt[n]{\log(1+n^\alpha)} \leq \sqrt[n]{n^\alpha}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow_{n\to\infty} \qquad \downarrow_{n\to\infty}$$

$$1 \qquad 1 \qquad 1$$

Esercizio: lim = 1 vale quando $\alpha < 0$

$$\Rightarrow \boxed{R = 1}$$

ii) $|z|=1 \qquad z = e^{i\vartheta} \qquad \vartheta \in [0, 2\pi)$

$$\Downarrow$$

$$z^n = \left(e^{i\vartheta}\right)^n = e^{in\vartheta}$$

Quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+n^\alpha)}{\sqrt{n}} \, e^{in\vartheta} \quad \longleftarrow$$

- Studio il caso $\alpha < 0$

$$\log(1+\underbrace{n^\alpha}_{\to 0,\ n\to\infty}) = n^\alpha + o(n^\alpha)$$

$$= n^\alpha \left(1 + o(1)\right)$$

con $o(1) \to 0$ $n \to \infty$

Dunque

$$\frac{\log(1+n^\alpha)}{\sqrt{n}} = \frac{n^\alpha(1+o(1))}{n^{1/2}}$$

$$= \frac{1+o(1)}{n^{1/2-\alpha}} \qquad \underline{\underline{\alpha < 0}}$$

Se $\frac{1}{2} - \alpha > 1 \iff \frac{1}{2} - 1 > \alpha$

$$\iff -\frac{1}{2} > \alpha$$

Ragiono così:

$\forall \vartheta$

$$\left| \frac{\log(1+n^\alpha)}{\sqrt{n}} e^{in\vartheta} \right| = \frac{\log(1+n^\alpha)}{\sqrt{n}}$$

$$= \frac{1}{\ldots} (\ldots)$$

$$= \boxed{\frac{1}{n^{\frac{1}{2}-\alpha}} \, (1+o(1))}$$

con $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}-\alpha}} < \infty$ purché $\alpha < -1/2$

Quindi per $\alpha < -1/2$ c'è CU su $|z| = 1$.

Ripetendo i conti appena fatti, mi accorgo che

$$\sup_{|z| \leq 1} \left| \frac{\lg(1+n^{\alpha})}{\sqrt{n}} z^n \right| \leq \frac{1}{n^{1/2-\alpha}} (1+o(1))$$

$\Downarrow$ Crit. W. $\qquad \sum O < \infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lg(1+n^{\alpha})}{\sqrt{n}} z^n$$

Converge unif. su $\{|z| \leq 1\}$

per $\alpha < -1/2$.

- $\theta = 0 \iff z = 1$ la serie diventa

$$\sum^{\infty} \frac{\lg(1+n^{\alpha})}{}$$

$n=1 \qquad \sqrt{n}$

$-\frac{1}{2} \leq \alpha < 0$

$$\frac{\log(1+n^\alpha)}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{1/2-\alpha}}(1+o(1)) \quad n \to \infty$$

Quindi per $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2-\alpha}} = \infty$

$z=1$

la serie non converge per $0 > \alpha \geq -\frac{1}{2}$

- se poi $\alpha > 0$

$$\frac{\log(1+n^\alpha)}{\sqrt{n}} \overset{n \geq 1}{\geq} \frac{\log 2}{\sqrt{n}}$$

Per confronto $\sum \frac{\log(1+n^\alpha)}{\sqrt{n}} = \infty$

$\forall \alpha > 0$

- $\vartheta = \pi$

$$\sum \frac{\log(1+n^\alpha)}{\sqrt{n}} e^{in\theta} = \sum$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log(1+n^\alpha)}{\sqrt{n}}$$

$||$

a_n

- $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$
- $n \longmapsto \frac{\lg(1+n^2)}{\sqrt{n}}$ è decrescente (verifico ovvero)

Leibniz: serie converge nel punto $z = -1$,

iii) Per C-H, $\forall \rho < 1 = R$ fissato la serie conv. unif. nel disco

$$A_\rho = \{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq \rho \}$$

$\square$

Cenni sulle funzioni olomorfe

Sia $A = \{ |z| < R \}$ il disco di convergenza di una serie di potenze

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

Abbiamo una funzione $f : A \to \mathbb{C}$.

DEF Diciamo che una funzione $f : A \to \mathbb{C}$ è olomorfa (analitica complessa) in A se per ogni $z_0 \in A$ esiste la seguente derivata complessa: esiste finito

$$= f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

$$z \to z_0 \qquad z - z_0$$

$$= \frac{df}{dz}(z_0) .$$

Affermo che le serie di potenze definiscono funzioni derivabili nel loro disco di convergenza: $|z| < R$

$$\frac{df(z)}{dz} = \frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dz} a_n z^n$$ Conti formali

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, n \, z^{n-1}$$