Lezione 17

lunedì 10 aprile 2017 10:34

Funzione esponenziale in campo reale e complesso.

Partiamo dal caso reale.

Definiamo la funzione $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

Col criterio del Rapporto si vede che il raggio di convergenza della serie di potenze è $R = +\infty$.

Sappiamo a priori che φ è continua.

Useremo questa notazione

$$\varphi(x) = e^x = \exp(x)$$

e chiameremo φ la funzione esponenziale (reale).

TEOR. Per ogni $x \in \mathbb{R}$ il seguente limite esiste finito e, di più, vale la formula

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Inoltre per $x > 0$ la succ. del limite è $\uparrow$.

Dim. Mi limito al caso $x > 0$.

Studio la succ.:

$$a_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \qquad n \geq 1$$

Affermo che lei è monotòna crescente

e sup. limit.

Binomio di Newton

$$a_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^k}{n^k}$$

BN

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{\boxed{n!}}{k!\,(n-k)!} \frac{x^k}{n^k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{\boxed{(n-k)}\,(n-k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1} \cdot \frac{x^k}{n^k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\, n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) \cdot \frac{x^k}{n^k}$$

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)}_{\wedge\, 1} \cdot\ldots\cdot \underbrace{\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}_{\wedge\, 1} x^k$$

Analogamente

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) x^k$$

Osserviamo che

Ovvero che

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \Rightarrow 1 - \frac{1}{n+1} > 1 - \frac{1}{n}$$

Quindi abbiamo che

$$a_{n+1} > a_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Inoltre

$$a_n < \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} < \infty \qquad \forall x > 0.$$

e poi

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

D'altra parte:

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right)} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)} x^k$$

Fisso $m \in \mathbb{N}$ e prendo $n \geq m$

$$a_n \geq \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) x^k$$

Chiaramente

$$\lim_{n\to\infty} a_n \geq \sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!} \qquad \in \mathbb{N}$$

Con $m \to \infty$

$$\lim a_n \geq \sum^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n \geq \sum_{k=0} \frac{x}{k!}.$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!},$$

$$x>0.$$

$\square$

<u>Inversione</u>

$$e^x := \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$$

$m \in \mathbb{N}$

$$= \sum_{k=0}^{m-1}\frac{x^k}{k!} + \underbrace{\sum_{k=m}^{\infty}\frac{x^k}{k!}}_{\text{Resto o Errore}}$$

Affermo che l'errore si può stimare in questo modo

$$\sum_{k=m}^{\infty}\frac{x^k}{k!} \leq \boxed{\frac{x^m}{m!}\,\frac{m}{m-x}} \quad \text{se } \boxed{0<x<m}$$

Ad esempio con $m=4$ e $x=1$

$$e = \sum^{\infty}\frac{1}{\ } \geq \sum^{m-1}\frac{1}{\ } = \sum^{3}\frac{1}{\ } =$$

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \geq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{k!} =$$

$$\geq \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} = 2 + \frac{2}{3}$$

$$\begin{array}{cccc} \| & \| & \| & \| \\ 1 & 1 & 1/2 & 1/6 \end{array}$$

Poi anche:

$$e \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} + \underbrace{\frac{1}{n!} \cdot \frac{n}{n-1}}_{\text{ERROR}}$$

e con $n = 4$

$$e \leq 2 + \frac{2}{3} + \frac{1}{4!} \frac{4}{3} = 2 + \frac{2}{3} + \frac{1}{18} < 3.$$

$\square$

Ora studio le proprietà dell'esponenziale

<u>TEOR</u> La funzione $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\varphi(x) = e^x$ definita sopra verifica le seg:

1) $e^{x+y} = e^x \cdot e^y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

identità fond.

2) $e^{-x} = \frac{1}{e^x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

3) $e^x > 0$

4) $x < y \Rightarrow e^x < e^y$

5) $\forall y \in \mathbb{R}$ con $y > 0$ esiste $x \in \mathbb{R}$: $e^x = y$.

Dim

(1) Si può provare partendo da qui:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\left(1 + \frac{x+y}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n} = 1$$

(2)

$$1 = e^0 = e^{x-x} \overset{(1)}{=} \underbrace{e^x}_{\neq 0} \cdot \underbrace{e^{-x}}_{\neq 0}$$

$$\Downarrow$$

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

(3)

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} > 0 \quad x \geq 0 \quad \overset{(2)}{\Rightarrow} \quad > 0 \text{ anche per } x < 0$$

(4)

$$0 < x < y \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!}$$

se poi sono negativi uso i punti (2) e (3)

(5)

$$\lim_{x \to \infty} e^x \geq \lim_{x \to \infty} 1 + x = +\infty$$

$x \to \infty \qquad\qquad x \to \infty$

2

$$\lim_{x \to -\infty} e^{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{e^{-x}} = 0$$

Poi $x \mapsto e^{x}$ è cont, e quindi $\varphi(x) = e^{x}$ assume tutti i valori in $(0, +\infty)$ (in modo unico).

$\square$

<u>Commento</u> Dunque è definita

$$\varphi^{-1} : (0, \infty) \to \mathbb{R}$$

l'inverso di $\varphi(x) = e^{x}$.

È il logaritmo

$$\varphi^{-1}(y) = \log y \quad , \quad y > 0 .$$

<u>Commento</u> $e := \exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Passiamo ora al campo <u>complesso</u>

Per $z \in \mathbb{C}$ definiamo le seguenti 3 funzioni

$$e^{z} = \exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k}}{k!} \qquad z \in \mathbb{C}$$

$$\sum^{\infty} \quad {}^{k} \, z^{2k}$$

- $\cos(z) := \sum_{k=0} (-1) \frac{}{(2k)!} \quad z \in \mathbb{C}$

- $\sin(z) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad z \in \mathbb{C}.$

Diremo che le 3 serie conv. assolutamente $\forall z \in \mathbb{C}$.

Ovvero il loro raggio di conv. è $R = +\infty$.

TEOREMA La funzione $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ verifica le seguenti proprietà:

① $\exp(z+\zeta) = \exp(z) \cdot \exp(\zeta) \quad \forall z, \zeta \in \mathbb{C}$;
(Identità Fondamentale)

② $\overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z}) \quad \forall$;

③ $|\exp(ix)| = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$;

④ $\exp(ix) = \cos x + i \sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

DIM. ① Argomento non rigoroso al 100 %

$$\exp(z+\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z+\zeta)^k}{k!} = \,'''$$

?

$$\exp(z) \cdot \exp(\zeta) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\zeta^k}{k!} \right) =$$

$$\exp(z)\cdot\exp(\zeta) = \left(\sum_{k=0} \frac{\quad}{k!}\right)\left(\sum_{k=0} \frac{\quad}{k!}\right)$$

$$= \left(1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\dots\right)\left(1+\frac{\zeta}{1!}+\frac{\zeta^2}{2!}+\frac{\zeta^3}{3!}+\dots\right)$$

$$= 1+\frac{z}{1!}+\frac{\zeta}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{\zeta^2}{2!}+\frac{z\zeta}{1!\cdot 1!}+\dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}\cdot\frac{\zeta^{n-k}}{(n-k)!}\cdot\frac{n!}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,z^k\cdot\zeta^{n-k}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(z+\zeta)^n = \exp(z+\zeta).$$

(2)

$$\overline{\exp(z)} = \overline{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\overline{z^k}}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\overline{z})^k}{k!} = \exp(\overline{z}).$$

(3) $x\in\mathbb{R}$

$$|\exp(ix)|^2 = \exp(ix)\cdot\overline{\exp(ix)} =$$

$$|z|^2 = z\cdot\overline{z}$$

$$\overset{(2)}{=} \exp(ix) \cdot \exp(\overline{ix})$$

$$= \exp(ix) \cdot \exp(-ix)$$

$$\overset{(1)}{=} \exp(ix - ix) = \exp(0)$$