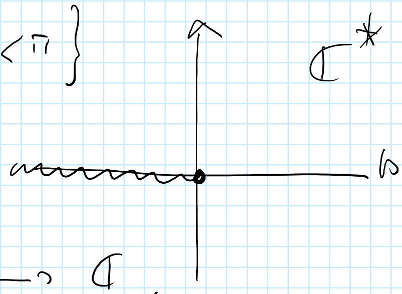
Lezione 18

martedì 11 aprile 2017 08:46

Logaritmo complesso

$$\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{ z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) \le 0 \ \text{e} \ \mathrm{Im}\, z = 0 \}$$

$$S = \{ z \in \mathbb{C} : -\pi < \mathrm{Im}\, z < \pi \}$$



Allora abbiamo $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

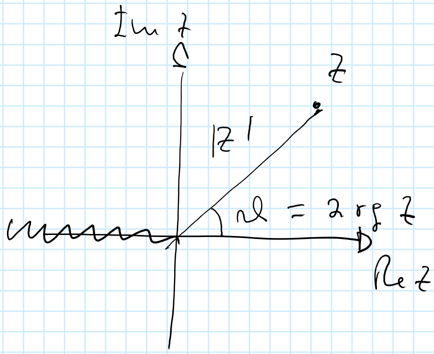
La sua restrizione ad S $\quad (\exp z \neq 0 \ \ \forall z \in \mathbb{C})$

$$\exp : S \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

è iniettiva e suriettiva.

Ora dato $z \in \mathbb{C}^*$ voglio calcolare $w \in S$ tale che

$$(*) \qquad e^{w} = z .$$



Avremo $\quad z = |z|\, e^{i \arg(z)}$

con $\arg z \in (-\pi, \pi)$

Poi cerchiamo $w = \mathrm{Re}\, w + i\, \mathrm{Im}\, w$

l'equazione $(*)$ diventa

$$= e^{\mathrm{Re}\, w + i\, \mathrm{Im}\, w} = e^{w} = z = |z|\, e^{i \arg(z)}$$

con $|z| > 0 \qquad (z \neq 0)$

$$= \underbrace{e^{\mathrm{Re}\, w}}_{>0} \cdot e^{i\, \mathrm{Im}\, w} = |z|\, e^{i \arg(z)}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} e^{\operatorname{Re} w} = |z| \\ \operatorname{Im} w = \arg z \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

logaritmo reale

$$\begin{cases} \operatorname{Re} w = \log |z| \\ \operatorname{Im} w = \arg z \end{cases}$$

e dunque

$$w = \log|z| + i \arg(z)$$

Dunque la funzione inversa di $\exp : S \to \mathbb{C}^*$ è la funzione:

$$\log : \mathbb{C}^* \to S$$

$$\boxed{\log z := \log|z| + i \arg(z).}$$

Risulta: $z \mapsto \log z$ è olomorfa.

$\square$

ESERCIZI DI RICAPITOLAZIONE

ES1 del 14/6/2016 Tema A

Determinare tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che convergono ciascuno dei seguenti integrali impropri

$$A = \int_1^{2} \frac{t-1}{t^2 (\log t)^{\alpha+1}} \, dt$$

$$B = \int_2^{\infty} \quad " \quad dt$$

$$C = \int_1^{\infty} \quad " \quad dt$$

Soluzione Parto da A

$$s = t-1 \qquad ds = dt$$

$$A = \int_0^1 \frac{s}{(1+s)^2 \left[\log(1+s)\right]^{\alpha+1}} \, ds$$

Confronto asintotico in $s=0$. Uso sviluppi

$$\log(1+s) = s + o(s) = s\left(1 + \underset{\substack{\downarrow s\to 0 \\ 0}}{o(1)}\right)$$

$$\left[\log(1+s)\right]^{\alpha+1} = s^{\alpha+1} \boxed{(1+o(1))}$$

Dunque la funz. integranda è

$$\frac{s}{(1+s)^2 \left[\log(1+s)\right]^{\alpha+1}} = \frac{s}{(1+s)^2 \, s^{\alpha+1} \, (1+o(1))}$$

$$\overline{(1+s)^2 \left[\log(1+s)\right]^{\alpha+1}} = \overline{\underbrace{(1+s)^2}\; s^{\alpha+1}\; (1+o(1))}$$

$$(1+s)^2 = 1+o(1)$$

$$= \boxed{\frac{1}{s^\alpha}} \underbrace{(1+o(1))}_{s\to 0} \qquad (1+o(1))\,(1+o(1)) = 1+o(1)$$

$$\frac{1}{1+o(1)} = 1+o(1)$$

ORA

$$\int_0^1 \frac{1}{s^\alpha}\, ds < \infty \iff \boxed{\alpha < 1}$$

Quindi per il CCA:

$$A < \infty \iff \boxed{\alpha < 1}$$

Passo a B

$$B = \int_2^\infty \frac{t-1}{t^2 (\log t)^{\alpha+1}}\, dt$$

Osservo che

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\frac{t-1}{t^2}}{\frac{1}{t}} = 1 \neq 0$$

Per il CCA

$$B < \infty \iff \int_2^\infty \frac{1}{t\,(\log t)^{\alpha+1}}\, dt < \infty$$

Calcolo l'ultimo integrale

$$\int_2^\infty \frac{1}{t} (\log t)^{-\alpha-1}\, dt = \left[\frac{(\log t)^{-\alpha}}{\quad} \right]^{t=\infty}$$

$$\int_2 \frac{1}{t} (\log t) \, dt \underset{\alpha \neq 0}{=} \left[\frac{(\log t)}{-\alpha} \right]_{t=2}$$

$$= -\frac{1}{\alpha} \lim_{t \to \infty} \left[\boxed{\left(\frac{1}{\log t}\right)^{\alpha}} - \left(\frac{1}{\log 2}\right)^{\alpha} \right]$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{\log 2}\right)^{\alpha} & \alpha > 0 \quad A \\ +\infty & \alpha \leq 0 \end{cases}$$

Poi per $\alpha = 0$

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{t} \frac{1}{(\log t)} \, dt = \int_2^{\infty} \frac{1}{t} (\log t)^{-1} \, dt$$

$$= \Big[\log \log t \Big]_{t=2}^{t=\infty} = +\infty$$

Conclusione:

$$B < 0 \iff \alpha > 0 .$$

Parte C

$$C = \int_1^{\infty} \dots \, dt < \infty \iff A \text{ e } B \text{ convergono}$$

$$\iff 0 \underset{B}{<} \alpha \underset{A}{<} 1$$

ES 3 del 14/6/2016 Tema A

Al variare di $x \in \mathbb{R}$ si consideri la serie di funz.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{x}{(1+|x|)^n}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

i) Studi. la CP

ii) Stabilire se c'è CU su intervalli del tipo (δ, ∞) con $\delta > 0$

iii) Stabilire se c'è CU su intervalli del tipo $[0, \delta]$ con $\delta > 0$.

Risoluzione. Siccome il termine generale è dispari basta studiare la serie per $x \geq 0$.

(i) CP. Per $x = 0$ la serie converge con somma 0;

$$\sum 0 = 0.$$

Considero $x > 0$

Funziona il Criterio della Radice / Rapporto.

Tuttavia procedo con un confronto

$$\sum_{n=0}^{\infty} \boxed{\frac{n+1}{n+2}} \frac{x}{(1+x)^n} \leq \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot \frac{x}{(1+x)^n} =$$

$$\frac{n+1}{n+2} \leq 1$$

$$= x \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+x}\right)^n$$

$$\frac{n+1}{n+2} \geq \frac{1}{2}$$

$$= x \frac{1}{1 - \frac{1}{1+x}}$$

$$= x \frac{x+1}{x+\cancel{1}-\cancel{1}}$$

$$= x+1 < \infty \quad \forall$$

Questo mostra che la serie converge $\forall\, x > 0$.

Concludo che:

Serie Conv. Punt. su $\mathbb{R}$.

ii) Studio la conv. uniforme: In vista del crit. W

Considero le funzioni

$$\phi_n(x) = \frac{x}{(1+x)^n}, \qquad x \geq 0,$$

Derivata

$$\phi_n'(x) = \frac{(1+x)^n - x\, n\,(1+x)^{n-1}}{(1+x)^{2n}}$$

$$= \frac{(1+x)^{n-1}}{(1+x)^{2n}} \left[1+x - nx \right]$$

Quindi

$$\phi_n'(x) \geq 0 \iff 1 + x(1-n) \geq 0$$

$$\iff x(n-1) \leq 1 \qquad n \geq 2$$

$$\iff x \leq \frac{1}{n-1}$$

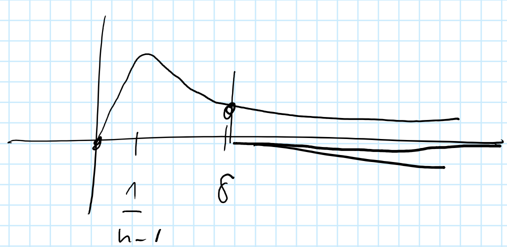
$x = \frac{1}{n-1}$ è il p.to di max assoluto di ϕ_n

Se $\delta > 0$ è fissato, definitivamente:

$$\frac{1}{n-1} < \delta$$

$$\downarrow \; n \to \infty$$

$$0$$



Quindi

$$\sup_{x\in[\delta,\infty)} \phi_n(x) = \phi_n(\delta) .$$

Ma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n+2} \frac{\delta}{(1+\delta)^n} < \infty$$

Dunque c'è conv. totale su $[\delta,\infty)$
e quindi per il Cr. di W. c'è CU su $[\delta,\infty)$
$\forall \delta > 0$.

iii) Dire se c'è CU su $[0,\delta]$, $\delta>0$.

Guardo la serie che si ottiene
mettendo $x = \frac{1}{n-1}$ nel termine generale:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{n+2} \frac{\frac{1}{n-1}}{\boxed{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}} \longrightarrow e$$

Una serie equivalente è

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{e} \sim \sum \frac{1}{n} = \infty$$

Weierstrass non funziona su $[0,\delta]$.

Riparto da capo

$$0 \leq f(x) = \sum_n^{\infty} \frac{n+1}{n+2} \frac{x}{(1+x)^n} , \quad x \geq 0$$

$$f(0) = 0$$

Stime

$$f(x) = \sum^{\infty} \frac{n+1}{\ } \frac{x}{\ } \geq \frac{1}{\ } \sum^{\infty} \frac{x}{\ } =$$

$$n=0 \quad n+2 \quad (1+x)^n \qquad 2 \quad n=0 \quad (1+x)^n$$

$$= \frac{1}{2}(1+x)$$

Quindi

$$f(x) \geq \frac{1}{2}(1+x) \qquad \forall\, x>0$$

e quindi NON può essere

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$$

$\Rightarrow$ f NON è cont. in $x=0$

$\Rightarrow$ NON può essere CU su $[0,\delta]$
$\delta>0$.

ES 2 del 26/1/2017

Si consideri la curva $\gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = (\cos t,\ t\sin t) \qquad t\in[0,2\pi]$$

i) Calcolare il versore tangente $T(t)$ nei punti t regolari

ii) Calcolare il $\bar{T}(0) = \lim_{t\to 0^+} T(t)$

iii) Stabilire in quali quadranti si hanno i punti di massimo e minimo ordinata nel supporto della curva.

iv) Disegnare il supporto della curva
(con cura intorno al punto $(1,0) \in Spt(\gamma)$).

Risoluzione : $\gamma(t) = (\cos t, t \sin t)$

i) Calcolo la derivata

$$\dot\gamma(t) = (-\sin t, \sin t + t \cos t)$$

Studio il sistema

$$\dot\gamma(t) = 0 \iff \begin{cases} -\sin t = 0 \\ \sin t + t\cos t = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t = 0, \pi, 2\pi \\ t \cos t = 0 \end{cases}$$

$$\iff \boxed{t = 0}$$

$t = 0$ unico p.to non regolare.

Per $t \in (0, 2\pi]$

$$T(t) = \frac{(-\sin t, \sin t + t\cos t)}{\sqrt{\sin^2 t + (\sin t + t\cos t)^2}}.$$

(ii) Devo calcolare il

$$T(0) = \lim_{t \to 0^+} T(t)$$

$\sin t = t(1+o(1))$ $\quad t \to 0$

$t \cos t = t(1+o(1))$

$$\sin t + t\cos t = 2t\,(1+o(1))$$

$$\sin^2 t + (\sin t + t\cos t)^2 = t^2(1+o(1)) + 4t^2(1+o(1))$$

Dunque per $t \to 0^+$

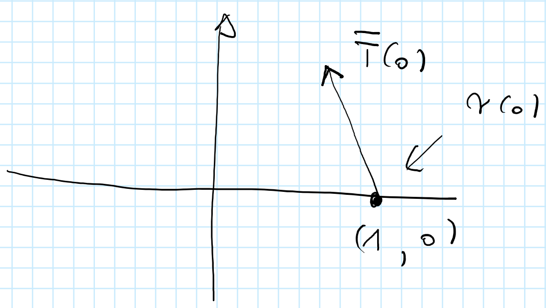
$$\frac{(-\sin t,\ \sin t + t\cos t)}{\sqrt{\sin^2 t + (\sin t + t\cos t)^2}} =$$

$$= \frac{(-t(1+o(1)),\ 2t(1+o(1)))}{\sqrt{t^2(1+o(1)) + 4t^2(1+o(1))}}$$

$$= \frac{t}{\sqrt{t^2}} \frac{(-1+o(1),\ 2+o(1))}{\sqrt{1+o(1)+4+o(1)}}$$

$$= \underset{\substack{\| \ t>0 \\ 1}}{\frac{t}{|t|}} \frac{(-1+o(1),\ 2+o(1))}{\sqrt{5+o(1)}}$$

$$\lim_{t\to 0^+} T(t) = \frac{(-1,2)}{\sqrt{5}} =: \overline{T}(0)$$



iii) Quadranti:

$f(t) = t\sin t$, $\quad f(0) = 0$

$f(2\pi) = 0$

$$f'(t) = \sin t + t \cos t$$

Studio l'equazione:

$$f'(t) = 0 \iff \sin t + t\cos t = 0$$

$$\iff \sin t = -t\cos t$$

$$\iff \frac{\sin t}{\cos t} = -t$$

$$= \operatorname{tg} t \qquad t \in [0, 2\pi]$$