Lezione 19

mercoledì 12 aprile 2017 10:25

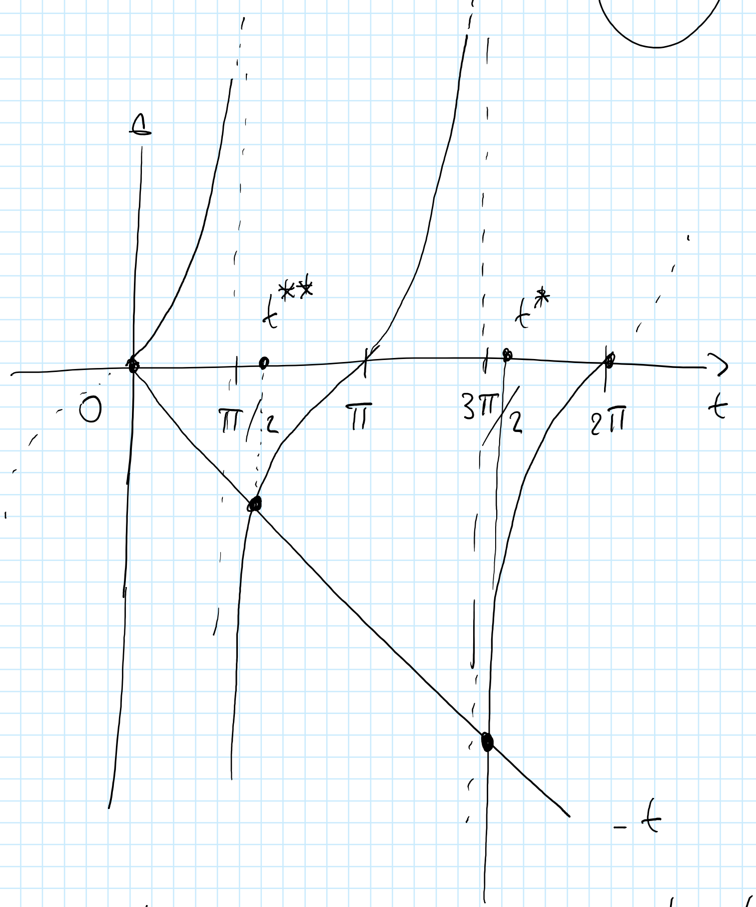
Curva $\gamma(t) = (\cos t, \, t \sin t)$ $\quad t \in [0, 2\pi]$

$$f(t) = t \sin t$$

$$f'(t) = \sin t + t \cos t = 0$$

$$f'(t) = 0 \iff \tan t = \frac{\sin t}{\cos t} = -t$$

$t \in [0, 2\pi)$



Dunque l'eq. è risolta in $t = t^{**} \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

$t = t^{*} \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$

ORA:

$$\gamma(t) = (\cos t, \, t \sin t)$$

$t = t^{**} \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ qui $\cos t^{**} < 0$

$t^{**} \sin t^{**} > 0$

$t^{**} \sin t^{**} > 0$

$\boxed{f'(t) \geq 0}$

- $\gamma(t^{**}) \in 2^{\circ}$ quadrante

In $\gamma(t^{**})$ l'ordinata assume il valore max

- $\gamma(t^{*}) \in 4^{\circ}$ quadrante $\stackrel{ok}{=}$

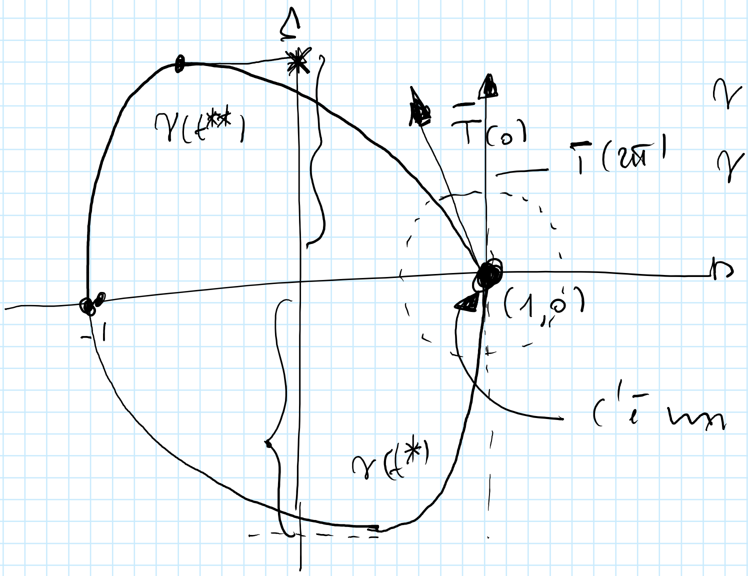
perché $\cos t^{*} > 0$ $t^{*} \sin t^{*} < 0$

$t^{*} \in \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$

In $\gamma(t^{*})$ l'ordinata assume il valore min.

iv) Disegno supporto $\gamma(t) = (\cos t, t \sin t)$

$t \in [0, 2\pi)$



$\gamma(0) = (1, 0)$

$\gamma(2\pi) = (1, 0)$

$$T(t) = \frac{(-\sin t, \sin t + t\cos t)}{(\sin^2 t + (\sin t + t\cos t)^2)^{1/2}}$$

$$T(2\pi) = \frac{(0, 2\pi)}{}$$

$$\left((2\pi)^2 \right)^{1/2}$$

$$= (0,1)$$

$\square$

ES 3 del 26/1/2017

Per $\alpha \geq 0$ si consideri l'integr. improprio:

$$I_\alpha = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx$$

i) Calcolare tutti gli $\alpha \geq 0$ t.c. I_α converge semplicemente

ii) " " " " " I_α converge assolutamente.

Sol

i) Separo l'integrale

$$\int_0^\infty dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx}$$

• Studio $\boxed{\int_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx}$

$$\sin x = x + o(x) = x\,(1 + o(1))$$

$$\frac{\sin x}{x^\alpha} = \frac{x\,(1 + o(1))}{x^\alpha} = \frac{1 + o(1)}{x^{\alpha - 1}}$$

$$\frac{\sin x}{x^\alpha} = \frac{\cdots}{x^\alpha} = \frac{\cdots}{x^{\alpha-1}}$$

Per il Crit. del Confr. Asint.

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx \quad \text{conv.} \iff \int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha-1}}\,dx < \infty$$

$$\iff \alpha - 1 < 1$$

$$\iff \boxed{\alpha < 2}\,.$$

- Studio l'integrale

$$\int_1^\infty \sin x \,dx \quad \text{converge per } \alpha > 0$$

Abel

perché $\frac{1}{x^\alpha} \downarrow 0$ per $x \to \infty$

Per $\alpha = 0$ NON converge.

Quindi converge $\iff \alpha > 2$

Concludo che $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$ converge

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{0 < \alpha < 2}$$

ii) Studio

$$\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x^\alpha}\,dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{|\sin x|}{x^\alpha}\,dx}_{\substack{\text{converge} \\ \Updownarrow \\ \alpha < 2 \\ \text{come sopra}}} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x^\alpha}}$$

Studio l'integrale

$$\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x^\alpha}\,dx$$

Certamente:

$$\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x^\alpha}\,dx \leq \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx < \infty$$

se

$\underline{\underline{\alpha > 1}}$

Consideriamo gli $\alpha \leq 1$.

Per $\alpha = 1$

$$\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,dx = +\infty$$ visto in classe

Per $0 \leq \alpha < 1$ è $x \geq 1$

$$x^\alpha \leq x$$

$$\frac{1}{x} \leq \frac{1}{x^\alpha}$$

$$\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x^\alpha}\,dx \geq \int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,dx = +\infty$$

Per confronto questo integrale diverge per $\alpha \leq 1$

Concludo

$$\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x^\alpha}\,dx < \infty \iff \underline{\underline{\alpha > 1}}.$$

Conclusione

$$\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x^\alpha}\,dx < \infty \iff 1 < \alpha < 2.$$

□

ES 4 del 26/1/2017

Per $x \in \mathbb{R}$ si consideri la serie di funzioni:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x}{x^2 n^2 + \log^4 n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

i) Stabilire per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie conv. punt.

ii) Studiare la conv. unif. della serie.

Soluzione: Per simmetria basta studiare il caso $x \geq 0$.

Per $x = 0$ la serie converge ($\sum 0 = 0$)

Studio $x > 0$. Per confronto

$$(*) \quad \frac{x}{x^2 n^2 + \log^4 n} \leq \frac{x}{x^2 n^2} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{n^2}$$

e quindi

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x}{x^2 n^2 + \log^4 n} \leq \frac{1}{x} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

Per confronto la serie converge $\forall x > 0$.

ii) Studio convergenza uniforme

Fisso $\delta > 0$ e prendo $x \geq \delta$.

Voglio usare il crit. di Weier. su $[\delta, \infty]$

$$\sup_{x \geq \delta} \frac{x}{x^2 n^2 + \log^4 n} \leq \sup_{x \geq \delta} \frac{1}{x\, n^2} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\delta} \cdot \frac{1}{n^2}$$

Dunque c'è CU su $[\delta, \infty)$ $\forall \delta > 0$. MA $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\delta n^2} < \infty$

Studio CU su $[0, \delta]$.

1^ Strategia $f_n(x) = \frac{x}{x^2 n^2 + \lg^4 n}$

e calcolo il valore max $\rightsquigarrow$ Crit W.

2^ Strategia: $\boxed{2ab \leq a^2 + b^2} \Leftarrow 0 \leq (a-b)^2$

$$x^2 n^2 + \log^4 n \geq 2\, x \cdot n \cdot \lg^2 n \qquad x > 0$$

$$\frac{x}{x^2 n^2 + \lg^4 n} \leq \frac{1}{2 n \lg^2 n} \qquad \forall x \geq 0 \quad \forall n$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x}{x^2 n^2 + \lg^4 n} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2 n \lg^2 n}$$

Quindi per il Crit. di Weierstrass Ia

Converge per il Criterio del

serie CU su $[0,\infty)$ $\qquad$ Confronto integrale

$$\int_2^\infty \frac{1}{x \lg^2 x}\, dx < \infty$$

$\Downarrow$

serie CU su $\mathbb{R}$.

ES 1 del 6/7/2016

Sia $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ la curva di equazione polare

$$\rho = 1 + \sin\theta \,, \quad \theta \in [0, 2\pi] \,.$$

i) Calcolare tutti i $\theta \in [0, 2\pi]$ tali che γ sia regolare

ii) Calcolare il campo unitario tangente T in θ

iii) Disegnare approx. il supporto di γ

iv) Calcolare la lunghezza di γ.

Soluzione

$$\gamma(\theta) = (\rho(\theta)\cos\theta \,,\ \rho(\theta)\sin\theta)$$

$$= \big((1+\sin\theta)\cos\theta \,,\ (1+\sin\theta)\sin\theta \big)$$

$$= \left(\cos\theta + \frac{1}{2}\sin(2\theta) \,,\ \sin\theta + \sin^2\theta \right)$$

Noi sappiamo che

$$|\dot\gamma(\theta)| = \sqrt{\rho^2 + \dot\rho^2} = \sqrt{(1+\sin\theta)^2 + \cos^2\theta}$$

$$|\dot\gamma(\theta)| = \sqrt{\rho^2 + \dot\rho^2} = \sqrt{(1+\sin\theta)^2 + \cos^2\theta}$$

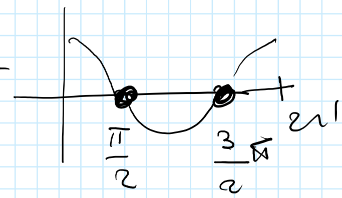
$$\rho = 1 + \sin\theta$$

$$\rho' = \cos\theta$$

Devo risolvere l'equazione $|\dot\gamma(\theta)| = 0$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} 1 + \sin\theta = 0 \\ \cos\theta = 0 \end{cases} \leftarrow$$



$$\Updownarrow$$

Questo è l'unico punto non regolare di γ $\longrightarrow$ $\theta = \frac{3}{2}\pi$

$$\dot\gamma(\theta) = \left(-\sin\theta + \cos(2\theta),\ \cos\theta + \sin 2\theta\right)$$

$$|\dot\gamma(\theta)| = \sqrt{1 + \sin^2\theta + 2\sin\theta + \cos^2\theta}$$

$$= \sqrt{2(1+\sin\theta)} = 0 \iff \theta = \frac{3}{2}\pi$$

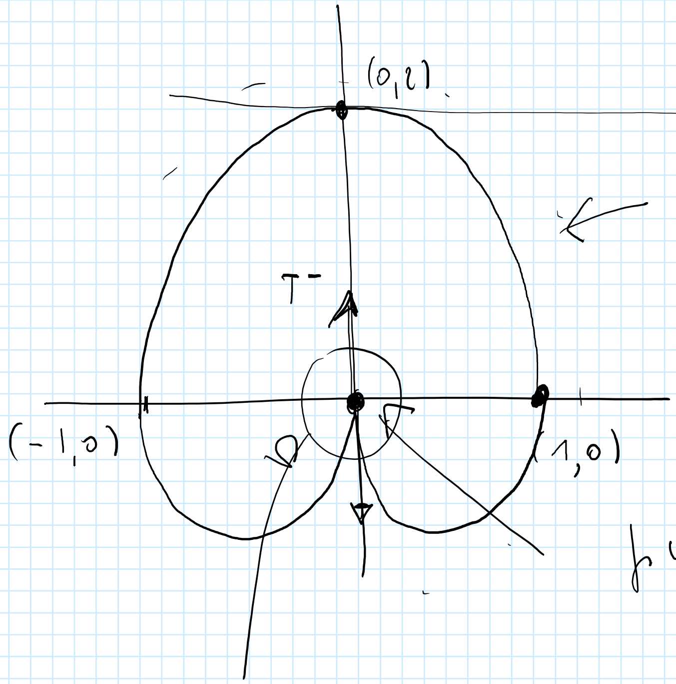
Dunque:

$$T(\theta) = \frac{\left(-\sin\theta + \cos(2\theta),\ \cos\theta + \sin 2\theta\right)}{\sqrt{2(1+\sin\theta)}}$$

$$\sqrt{2\,(1+\sin\theta)}$$

iii) Disegnare supporto

$\theta = 0 \Rightarrow \rho = 1 + \underset{\underset{0}{\shortparallel}}{\sin\theta} = 1$



punto non regolare.

$\lim\limits_{\theta \to \frac{3}{2}\pi^{\pm}} T(\theta)$ dovrei calcolare

(iv) Lunghezza di γ

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2\,(1+\sin\theta)}\, d\theta$$

$$= 2\sqrt{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1+\sin\theta}\, d\theta$$

$$= \ldots \int^{\pi/2} \frac{\sqrt{1+\sin\theta}\,\sqrt{1-\sin\theta}}{\ldots}\, d\theta$$

$$= 2\sqrt{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sqrt{1+\sin\theta}\;\sqrt{1-\sin\theta}}{\sqrt{1-\sin\theta}}\, d\theta$$

$$= 2\sqrt{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos^2\theta}}{\sqrt{1-\sin\theta}}\, d\theta$$

$$= 2\sqrt{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\sin\theta}}\, d\theta$$

$$= 2\sqrt{2} \left[-2\,(1-\sin\theta)^{1/2} \right]_{\theta=-\pi/2}^{\theta=\pi/2}$$

$$= 4\sqrt{2}\left[\sqrt{2}\right] = 8 .$$