Lezione 2

martedì 28 febbraio 2017 08:41

③ Serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$ ← Voglio verificare

ORA:

$n^2 \geq n \cdot (n-1)$ $n \geq 2$

$\Updownarrow$

$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$ $n \geq 2$

$\Downarrow$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\, n}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\, n} = 1 < \infty$ Converge

Quindi per confronto

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 1$$

Converge.

Serie di Fourier

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

(4) Studiamo la serie armonica

$$\underset{a_n}{\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}}} = \infty$$

e voglio dimostrare

$a_n \to 0$, $n \to \infty$

C N di conv. è verificata

In effetti

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}} + \frac{1}{9} + \dots$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{= \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}_{= \frac{1}{2}} + \dots$$

$$= +\infty$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

diverge a $+\infty$

(5) Serie armonica generalizzata.

Fissiamo un parametro $\underline{\underline{\alpha > 0}}$.

Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

ORA!

$\alpha = 1 \Rightarrow$ serie diverge

$\alpha = 2 \Rightarrow$ serie converge.

<u>CASO $\alpha > 2$</u>:

$n^\alpha \geq n^2$ sì $\forall n \geq 1$.

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^2} \quad \forall n \geq 1.$$

$$\frac{\ }{n^{\alpha}} \leq \frac{\ }{n^{2}}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2}} \qquad \forall \alpha \geq 2$$

Conclusione $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} < \infty$ per $\alpha \geq 2$.

CASO $0 < \alpha \leq 1$:

$$n^{\alpha} \leq \qquad \forall n \geq 1$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{n^{\alpha}} \geq \frac{1}{n} \qquad \forall n \geq 1$$

$$\Downarrow$$

$$\sum^{\infty} \frac{1}{\ } \geq \sum^{\infty} \frac{1}{\ } = \infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \geq \sum_{n=1} \frac{1}{n} = \infty$$

Per confronto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \infty \qquad \underline{\underline{0 < \alpha < 1}}$$

.

<u>Non</u> abbiamo discusso $1 < \alpha < 2$.

La serie converge in questo caso,

lo vedremo con un confronto

integrali.

<u>TEOREMA</u> La serie armonica generalizzata

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < \infty}_{\text{converge}} \iff \underline{\underline{\alpha > 1}} \; ,$$

<u>ES. 2</u> Calcolare la somma di ciascuna delle due serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \, , \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{2n-1}} \, .$$

<u>Sol</u>

$$\sum^{\infty} \frac{1}{} = \sum^{\infty} \frac{3 \cdot 1}{}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{2n-1}} = \sum_{n=1} \frac{3 \cdot 1}{3^{2n}}$$

$$= 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{2n}}$$

$$= 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3^2)^n}$$

$$= 3 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^n$$

$$= 3 \left(-1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^n \right)$$

$$= 3 \left(-1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} \right)$$

$$= \dots = \frac{3}{8} .$$

<u>Es. 4</u> Scrivere il numero decimale periodico

$$x = 0,454545\ldots = 0,\overline{45}$$

in forma razionale $x = \frac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{N}$.

Sol.

$$x = \frac{4}{10} + \frac{5}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{10^{1+2n}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{10^{2n}}$$

$$= \frac{4}{10} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{100}\right)^n + 5 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{100}\right)^n$$

$$= \frac{4}{10} \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} + 5 \left(-1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{100}}\right)$$

$$= \dots = \frac{5}{11}.$$

$\square$

CRITERI DELLA RADICE E DEL RAPPORTO PER SERIE REALI POSITIVE

Consideriamo una serie con termine generale positivo

$$\sum^{\infty} a_n, \qquad a_n \geq 0.$$

$$\sum_{n=1} a_n \quad , \qquad a_n \geq 0 .$$

Formo le somme parziali

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \quad , \quad n \in \mathbb{N} .$$

La succ. $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è crescente

Quindi esiste il limite

$$\lim_{n \to \infty} s_n \quad \text{finito o } +\infty .$$

TEOR. (Criterio del confronto)

Siano $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ non negativi tali che

$$0 \leq a_n \leq b_n \quad \text{definitivamente.}$$

(cioè: $\forall n \geq \bar{n}$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$)

Allora:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$ converge $\Rightarrow$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ converge

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ diverge $\Rightarrow$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$ diverge.

DIM. Ipotesi vale con $\bar{n} = 1$.

$$s_n = a_1 + \dots + a_n$$
$$6_n = b_1 + \dots + b_n$$

ORA:

$$s_n \leq 6_n \qquad \forall n$$

ORA:

$$s_n \leq b_n \qquad \forall n$$

Etc.

$\square$

TEOR (Criterio della Radice)

Sia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie con termine generale positivo, $a_n \geq 0$.

Consideriamo il

$$L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \in [0, +\infty].$$

($\sqrt[n]{a_n} \geq 0$)

Allora ci sono questi due casi:

① Se $L < 1$ allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

② Se $L > 1$ allora il termine generale della serie non è infinitesimo e quindi la serie diverge a $+\infty$: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$.

COMMENTO: Se $L = 1$ allora la serie può sia convergere che divergere.

DIM ① Voglio usare il criterio del confronto. (con serie geometrica).

Ipotesi:

Ipotesi:

$$L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$$

Allora esiste $L < q < 1$ $q \in \mathbb{R}$.

$\hat{}$ Lo scelgo a piacere.

Uso la definizione di limite superiore per dire che

$\exists\, \bar{n} \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq \bar{n}$ si verifica che

$$\sqrt[n]{a_n} < q$$

Ma allora

$\Updownarrow$

$$a_n < q^n \quad \forall n \geq \bar{n}$$

E dunque

$$\sum_{n=\bar{n}}^{\infty} a_n \underset{\leq}{<} \sum_{n=\bar{n}}^{\infty} q^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

Convergono

Converge perché $q < 1$

Quindi per il crit. del confr. la serie converge.

② $L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$

Esiste $1 < q < L$ $\quad (\exists q \in \mathbb{R})$

Quindi dalla def. di lim sup:

esiste una selezione di indici $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$

tale che

$$\sqrt[n_k]{a_{n_k}} > q \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\Updownarrow$$

$$a_{n_k} > q^{n_k} \qquad n_k \to \infty$$

$$q^{n_k} \xrightarrow{k \to \infty} +\infty \qquad q > 1$$

Quindi

$$a_{n_k} \xrightarrow[k \to \infty]{} +\infty$$

$$\Downarrow$$

$$a_n \not\xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

$$\Downarrow$$

È violata la CN di convergenza.

∞

$\Downarrow$ E viceversa di convergenza.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$$

$\square$

<u>ESERCIZIO</u> Stabilire se converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos n}{\sqrt{1+n^3}} = a_n .$$

SOL. É una serie a termini positivi: $a_n \geq 0 \quad \forall n$

Quindi la serie conv. o pp. diverge a $+\infty$.

Conti:

$$0 \leq \frac{1+\cos n}{\sqrt{1+n^3}} \leq \frac{2}{\sqrt{n^3}} = \frac{2}{n^{3/2}} \qquad \forall n \geq 1$$

$$1+n^3 \geq n^3$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+n^3}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^3}}$$

Per confronto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos n}{\sqrt{1+n^3}} \leq \sum^{\infty} \frac{2}{n^{3/2}} =$$

$$= 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < \infty$$

perché

$\alpha = 3/2 > 1$.

Per il Crit. del Confronto la serie data converge.

TEOR (Criterio Rapporto) Sia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie reale con termine generale strett. positivo $a_n > 0$ $\forall n$. Supponiamo che esista

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \in [0, \infty].$$

Allora:

1. se $L < 1$ la serie converge $\sum a_n < \infty$
2. se $L > 1$ il termine generale non è infinitesimo e dunque la serie diverge.

COMM se $L = 1$: nessuna informazione.

DIM (1) Ipotesi:

ipotesi

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$$

Dunque esiste $L < q < 1 \quad q \in \mathbb{R}.$

$\uparrow \quad =$

Lo scelgo.

Dunque esiste $\bar{n} \in \mathbb{N} \ \forall n \geq \bar{n}$ avremo che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$$

$$\Updownarrow \qquad \underline{\underline{a_n > 0}}$$

$$a_{n+1} < q \, a_n .$$