

Lezione 2

martedì 28 febbraio 2017

08:41

③ Serie $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^2} < \infty \leftarrow$ Voglio verificare

Ora:

$$h^2 \geq h \cdot (h-1) \quad h \geq 2$$

$$\frac{1}{h^2} \leq \frac{1}{h(h-1)} \quad h \geq 2$$

$$\sum_{h=2}^{\infty} \frac{1}{h^2} \leq \sum_{h=2}^{\infty} \frac{1}{h(h-1)}$$

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{(h+1)h}$$

Quindi per
confronto

$$\sum_{h=2}^{\infty} \frac{1}{h^2} \leq 1$$

Converge.

Converge

serie di Fourier

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

④ Studiamo la serie armonica

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h} \stackrel{?}{=} \infty$$

Verifica di convergenza

$\frac{1}{2h} < \frac{1}{h} < \frac{1}{2h}$

$h \rightarrow \infty$

$\subset N$ di conv. verificata

In effetti

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \dots$$

$$\left(\geq \right) 1 + \left(\frac{1}{2} \right) + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \dots$$

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

$$= +\infty$$



$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h} = \infty$$

diverge a $+\infty$

⑤ Serie armonica generalizzata.

Fissiamo un parametro $\alpha > 0$.

Consideriamo la serie

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^{\alpha}}$$

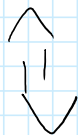
ORA:

$\alpha = 1 \Rightarrow$ serie diverge

$\alpha = 2 \Rightarrow$ serie converge.

Caso $\alpha > 2$:

$$h^{\alpha} \geq h^2 \quad \forall h \geq 1.$$



$$\frac{1}{h^{\alpha}} \leq \frac{1}{h^2} \quad \forall h \geq 1.$$

$$\frac{1}{h^d} \approx \frac{1}{h^2}$$

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^d} \approx \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^2} \quad \forall d \geq 2$$

Conclusione $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^d} < \infty$ per $d \geq 2$.

Caso $0 < d \leq 1$:

$$h^d \approx h^2 \quad \forall h \geq 1$$

$$\frac{1}{h^d} > \frac{1}{h^2}$$

$$\frac{1}{h^d} > \frac{1}{h} \quad \forall h \geq 1$$

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^d} > \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h} = \infty$$

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^d} > \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h} = \infty$$

Per confronto

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^d} = \infty \quad \underline{\underline{0 < d < 1}}$$

Non abbiamo dunque $1 < d < 2$.

La serie converge in questo caso, lo vedremo con un confronto integrale.

TEOREMA La serie armonica generalizzata

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^d} < \infty \quad (\Leftrightarrow) \quad \underline{\underline{d > 1}},$$

converge

ES. 2 Calcolare la somma di ciascuna delle due serie

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{2^h} \quad , \quad \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{3^{2h-1}}$$

Sol

$$\underline{\underline{\infty}} \quad \frac{1}{\underline{\underline{3}}} = \sum_{h=1}^{\infty} \underline{\underline{3}} \cdot 1$$

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{3^{2h-1}} = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{(3) \cdot 1}{3^{2h}}$$

$$= 3 \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{3^{2h}}$$

$$= 3 \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^2}\right)^h$$

$$= 3 \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^h$$

$$= 3 \left(-1 + \sum_{h=0}^{\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^h \right)$$

$$= 3 \left(-1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} \right)$$

$$= \dots = \frac{3}{8}$$

ES. 4 Scrivere il numero decimale
 periodico

$$x = 0,454545\dots = 0, \overline{45}$$

in forma razionale $x = \frac{p}{q}$ con
 $p, q \in \mathbb{N}$.

Sol.

$$x = \left(\frac{4}{10} + \frac{5}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \dots \right)$$

$$= \sum_{h=0}^{\infty} \frac{4}{10^{1+2h}} + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{5}{10^{2h}}$$

$$= \frac{4}{10} \sum_{h=0}^{\infty} \left(\frac{1}{100} \right)^h + 5 \sum_{h=1}^{\infty} \left(\frac{1}{100} \right)^h$$

$$= \frac{4}{10} \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} + 5 \left(-1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} \right)$$

$$= \dots = \frac{5}{11}$$

Q

CRITERI DELLA RADICE E DEL RAPPORTO

PER SERIE REALI POSITIVE

Consideriamo una serie con termini
 generale positivo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \quad a_n \geq 0.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n \geq 0.$$

Formo le somme parziali

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(è succ. $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è crescente
 quindi esiste il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \text{ finito o } +\infty.$$

TEOR. (Criterio del confronto)

Siano $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ non negativi h.c.

$$0 \leq a_n \leq b_n \text{ definitivamente.}$$

(cioè: $\exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n > \bar{n}$)

Allora:

$$1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty \text{ Converge} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \text{ Converge}$$

$$2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty \text{ Diverge} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty \text{ Diverge}$$

DIM. Ipotesi vera con $\bar{n} = 1$.

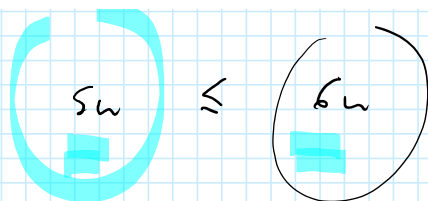
$$S_n = a_1 + \dots + a_n$$

$$b_n = b_1 + \dots + b_n$$

ORA:

$$\left(S_n \right) < \left(b_n \right) \quad \forall n$$

ORA:



θ_n

Etc.

=

□

TEOR (Criterio della Radice)

Sia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie con termine generale $n=1$ positivo, $a_n \geq 0$.

Consideriamo il

$$L = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \in [0, +\infty]$$

Allora ci sono questi due casi:

(1) Se $L < 1$ allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

(2) Se $L > 1$ allora il termine generale della serie non è infinitesimo e quindi la serie diverge a $+\infty$: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$.

COMMENTO: Se $L = 1$ allora la serie può convergere o divergere.

DIM (1) Voglio usare il criterio del confronto. (con serie geometriche).

Ipotesi:

n

Ipotesi:

$$(L) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \quad (1)$$

Allora esiste $L < q < 1$ $q \in \mathbb{R}$.

\Leftarrow L scelto a piacere.

Usando la definizione di limite superiore per dire che

$\exists \bar{n} \in \mathbb{N} \forall n \geq \bar{n}$ si verifica che

$$\sqrt[n]{a_n} < q$$

Ma allora



$$a_n < q^n$$

$$\forall n \geq \bar{n}$$

È dunque

$$\sum_{n=\bar{n}}^{\infty} a_n$$

$<$

$$\sum_{n=\bar{n}}^{\infty} q^n$$



Converge

perché $q < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

Convergenza

Quindi per il crit. del comp. la serie converge.

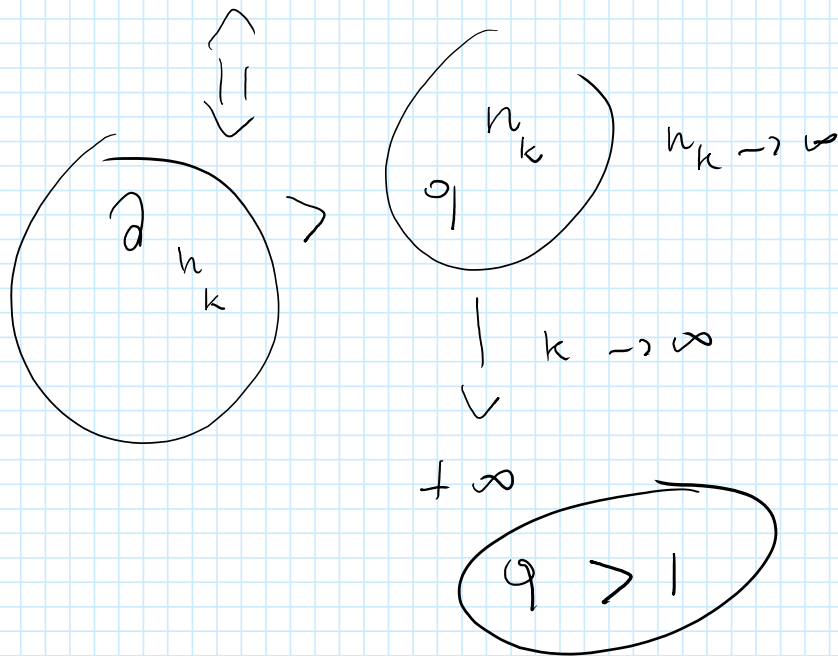
$$(2) \quad L = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$$

Esiste $1 < q < L$ ($\exists q \in \mathbb{R}$)

Quindi dalla def. di lim sup:
 esiste una successione di indici $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$

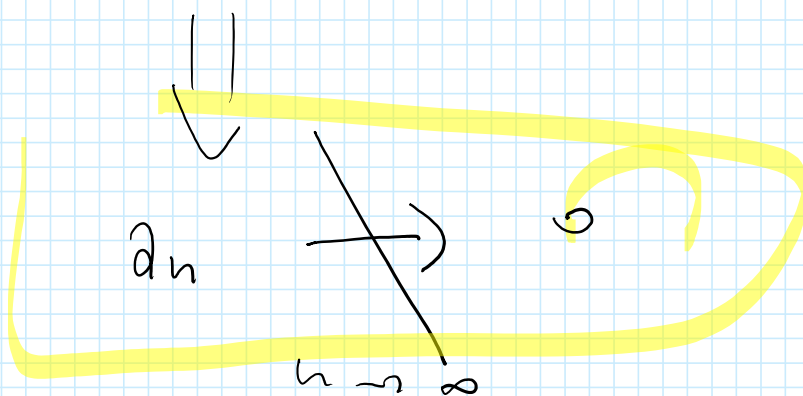
ta che

$$\sqrt[n_k]{a_{n_k}} > q \quad \forall k \in \mathbb{N}$$



Quindi

$$a_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} +\infty$$



∞ \Downarrow È vietato la CN di convergenza.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2n = +\infty$$

□

ESERCIZIO Stabilire se converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \cos n}{\sqrt{1 + n^3}}$$

Sol. È una serie a termini positivi: $a_n > 0$
 quindi la serie conv. o pp.
 o diverge a $+\infty$.

Conti:

$$0 < \frac{1 + \cos n}{\sqrt{1 + n^3}} \leq \frac{2}{\sqrt{n^3}} = \frac{2}{n^{3/2}} \quad \forall n > 1$$

$$1 + n^3 \geq n^3$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + n^3}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^3}}$$

Per confronto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \cos n}{\sqrt{1 + n^3}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^{3/2}} =$$

$$= 2 \cdot \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^{3/2}} < \infty$$

perché

$$\alpha = 3/2 > \underline{1}.$$

Per il Crit. del Cauchy
la serie data converge.

TEOR (Criterio Rapporto) Sia $\sum_{h=1}^{\infty} a_n$ una

serie reale con termine generale strett. positivo
 $a_n > 0 \quad \forall n$. Supponiamo che esista

$$L = \lim_{h \rightarrow \infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right) \in [0, \infty).$$

Allora:

① Se $L < 1$ la serie converge $\sum a_n < \infty$

② Se $L > 1$ il termine generale non
è infinitesimo e dunque
la serie diverge.

COMM Se $L = 1$: nessuna informazione.

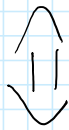
DIM ① Ipotesi: ipotesi

$$L = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$$

Thmome esiste $L < q < 1$ $q \in \mathbb{R}$.
f =
Lo rule.

Thmome esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ $\forall n > \bar{n}$ avremo che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$$



$$\underline{\underline{a_n > 0}}$$

$$a_{n+1} < q a_n .$$