Lezione 21

mercoledì 19 aprile 2017 10:32

CARATTERIZZAZIONE TOPOLOGICA DELLA CONTINUITÀ

Premessa X, Y insiemi

$$f : X \to Y$$

- Dato $A \subset X$, definiamo

$$f(A) := \{ f(x) \in Y : x \in A \} \subset Y$$

immagine di A

- Dato $B \subset Y$ definiamo l'antimmagine di B

$$f^{-1}(B) := \{ x \in X : f(x) \in B \} \subset X.$$

OSSERVAZIONI $f : X \to Y$

1) $A \subset f^{-1}(f(A)) \quad \forall A \subset X$

2) $f(f^{-1}(B)) \subset B \quad \forall B \subset Y$

TEOREMA Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due SM, e sia $f : X \to Y$. Sono equivalenti le seguenti 3 affermazioni:

1) $f : X \to Y$ è cont. su tutto X

2) $f^{-1}(A) \subset X$ è aperto in X $\forall A \subset Y$ aperto di Y.

3) $f^{-1}(C) \subset X$ è chiuso in X $\forall\, C \subset Y$ chiuso in Y.

Dim Provo che 1) $\Rightarrow$ 2).

Ipotesi: f è cont. in tutti i punti di X.

Poi prendo $A \subset Y$ aperto in Y.

Voglio provare che

$$f^{-1}(A) = \{x \in X : f(x) \in A\} \subset X$$

è aperto in X.

Devo provare che preso $x_0 \in f^{-1}(A)$ $\quad (f(x_0) \in A)$ aperto

devo trovare $r > 0$ tale che

$$B_X(x_0, r) \subset f^{-1}(A)$$

Siccome A è aperto esiste $\varepsilon > 0$ tale che

$$B_Y(f(x_0), \varepsilon) \subset A. \quad (*)$$

Poi siccome f è cont. in x_0:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \boxed{d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon}$$

$$\Downarrow$$

$$f(B_X(x_0, \delta)) \subset B_Y(f(x_0), \varepsilon) \subset A.$$

$$\Downarrow$$

$$B_X(x_0, \delta) \subset f^{-1}(f(B_X(x_0, \delta))) \subset f^{-1}(A)$$

Con $r = \delta > 0$ ho provato che x_0 è p.to interno di $f^{-1}(A)$

$\Downarrow$

$f^{-1}(A) \subset X$ è aperto

$\forall\ A \subset Y$ aperto.

Provo che 2) $\Rightarrow$ 1).

Ipotesi: $f^{-1}(A) \subset X$ è aperto se $A \subset Y$ è aperto

Dato $x_0 \in X$ voglio provare che f è cont. nel punto x_0. Ovvero:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tale che $f(B_X(x_0, \delta)) \subset B_Y(f(x_0), \varepsilon)$

Siccome $B_Y(f(x_0), \varepsilon)$ è un ins. aperto

$\Downarrow$

$\circledast$ $\underbrace{f^{-1}(B_Y(f(x_0), \varepsilon))}_{\ni x_0}$ è aperto in X

sì è un p.to interno.

Quindi $\exists\ \delta > 0$ tale che

$$B_X(x_0, \delta) \subset f^{-1}(B_Y(f(x_0), \varepsilon)).$$

X f ...

$$f(B_X(x_0,\delta)) \subset f(f^{-1}(B_Y(f(x_0),\varepsilon))) \subset$$

$$\subset B_Y(f(x_0),\varepsilon).$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta$ tale che ... vale

#.

ESERCIZIO Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione.

e consideriamo:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > f(x)\},$$

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq f(x)\}.$$

Dimostrare o confutare ciascuna delle seguenti 4 affermazioni

1) f cont. $\Rightarrow$ A è aperto in $\mathbb{R}^2$

2) $A \subset \mathbb{R}^2$ è aperto $\Rightarrow$ f è cont. da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$

3) f cont. $\Rightarrow$ $C \subset \mathbb{R}^2$ è chiuso.

4) $C \subset \mathbb{R}^2$ è chiuso $\Rightarrow$ f è cont. da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$.

Risoluzione

1) VERO. Infatti:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y - f(x) > 0\}$$

Definiamo $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$F(x,y) = y - f(x)$$

$$A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : F(x,y) \in (0,\infty)\}$$

$$= F^{-1}\big((0,\infty)\big)$$

Ed ora $(0,\infty) \subset \mathbb{R}$ è aperto.

Ma $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad F(x,y) = y - \underbrace{f(x)}$

è continua, perché somma di due funzioni continue nella variabile (x,y).

$$\Rightarrow A = F^{-1}\big((0,\infty)\big) \text{ è aperto}$$

in quanto controimmagine secondo F cont. di un aperto.

2) A aperto $\overset{?}{\not\Rightarrow}$ f continua.

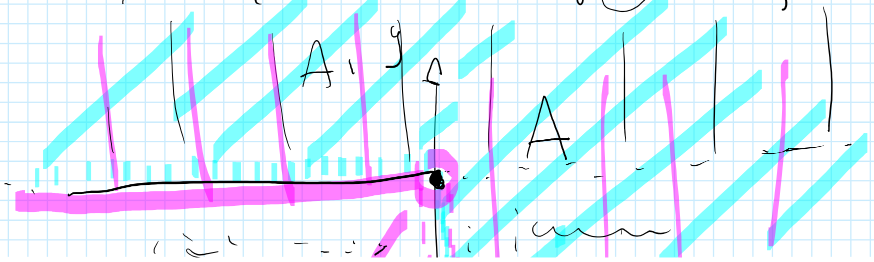
NO. Infatti consideriamo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \le 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$

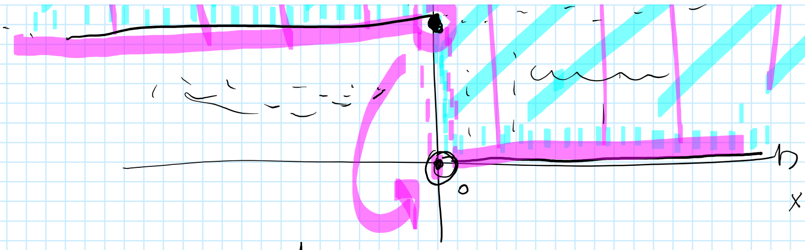
Non è cont. nel p.to $x = 0$

Tuttavia

$A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y > f(x)\}$ è aperto



$(0,1) \subset \mathbb{R}$



$(0,1) \in \mathbb{R}$

$$A = A_1 \overset{\text{aperto}}{\cup} (A_2 \cap A_3) \implies A \text{ è aperto}$$

A_1 aperto; A_2 ap., A_3 ap.; $\underbrace{A_2 \cap A_3}_{\text{ap.}}$

$$A_1 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 1 \}$$ è aperto

è l'antiimmagine secondo $F(x,y) = y$ continua di $(1, \infty)$ aperto

$A_2 = \{ y > 0 \}$

$A_3 = \{ x > 0 \}$

A_2 A_3 sono aperti

③ f cont. $\implies$ $C = \{ y \geq f(x) \}$ è chiuso

VERO!

$$C = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : F(x,y) := y - f(x) \geq 0 \}$$

$$= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : F(x,y) \in [0, \infty) \}$$

$$= F^{-1} (\underbrace{[0, \infty)}_{\text{è chiuso}})$$ è chiuso essendo antiimmag. cont. di un chiuso.

F è cont.

④ C chiuso $\overset{?}{\implies}$ f cont. NO

(4) C chiuso $\Rightarrow$ f cont. NO

FALSO

Consideriamo

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases}$$

Dico che $C = \{ y \geq f(x) \}$ è chiuso

ma f non è cont.

$\square$

CALCOLO DIFFERENZIALE IN PIÙ VARIABILI

$\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$

$e_1, \dots, e_n$ base ortonormale

$$e_i = (0 - 0, \underset{i}{1}, 0 - 0) \quad i = 1, \dots, n$$

Conviene pensare

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ | \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ | \\ 0 \end{pmatrix} \text{ i-esimo rigo}$$

$x = (x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$ conviene pensarlo

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

DEF Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e sia $x_0 \in A$. Sia poi $f: A \to \mathbb{R}$.

Diciamo che f ha la derivata parziale i-esima

Diciamo che f ha la derivata parziale i-esima nel punto x_0 se esiste finito il seguente limite

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\overbrace{x_0 + t e_i}) - f(x_0)}{t}.$$

Diremo che f è "derivabile in x_0" se esistono finite tutte le derivate parziali

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0).$$

<u>ESEMPIO</u> Sia $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$

$$f(x,y) = e^{x^2} \cdot \sin y \quad , \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

È derivabile in tutti i punti:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x\, e^{x^2} \cdot \sin y$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = e^{x^2} \cos y$$