Lezione 22

mercoledì 26 aprile 2017 10:35

ES La funzione $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$,

$$f(x) = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

non ha le derivate parziali in $x = 0$.

Per $x \neq 0$ si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i}\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}} \frac{\cancel{2} x_i}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}}$$

$$= \frac{x_i}{|x|}, \quad x \neq 0.$$

NOTAZIONI

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \partial_i f = \partial_{x_i} f = D_i f = f_{x_i}$$

Significato geometrico delle derivate parziali

Sia $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ derivabile nel punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Le due curve $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

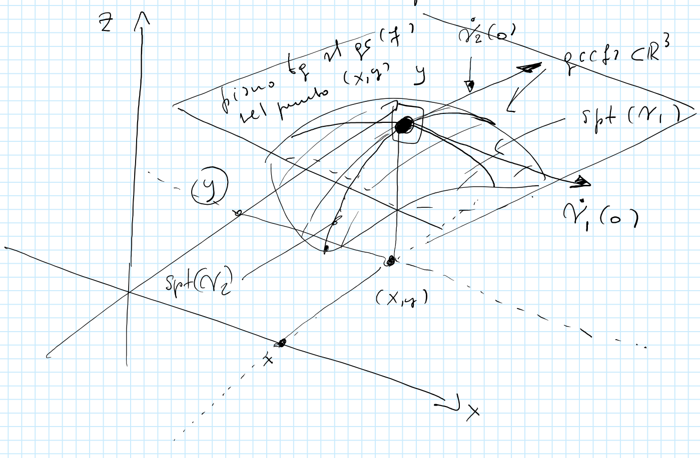
$$\gamma_1(t) = \left(x+t, y, f(x+t, y)\right) \in \mathbb{R}^3 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\gamma_2(t) = \left(x, y+t, f(x, y+t)\right) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{"}$$

sono derivabili in $t = 0$ con

$$\dot{\gamma}_1(0) = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)$$

$$\dot{\gamma}_2(0) = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$$



DEF Data $f: A \to \mathbb{R}$ con $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto e

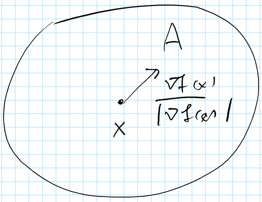
$x \in A$, con f derivabile in x, allora si può definire il gradiente di f nel punto x come il vettore

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right) \in \mathbb{R}^n$$

Altra notazione $\nabla f(x) = Df(x) = \mathrm{grad}(f)(x)$.

OSSERV. (Significato geometrico del gradiente).
Supponiamo che sia $|\nabla f(x)| \neq 0$. Allora $\nabla f(x)$ contiene due informazioni:

(1) La direzione $\nabla f(x) / |\nabla f(x)|$ è la direzione di massima crescita della funzione f



(2) La lunghezza $|\nabla f(x)|$ è la velocità di crescita della funzione f nella direzione al punto (1)

DEF Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto, $x \in A$ e $v \in \mathbb{R}^n$ vettore di direzione. Diciamo che f ha derivata direzionale nella direzione v se esiste finito il seguente limite:

$$= \frac{\partial f}{\partial v}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}$$

$$= f_v(x).$$

ESEMPIO Sia $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ \boxed{0} & x = y = 0 \end{cases}$$

Fisso un vettore $v \in \mathbb{R}^2$, $v = (v_1, v_2) \neq 0$, e provo a calcolare le derivate direzionali in $\underline{0}$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(0+tv) - f(0)}{t}$$

$$= \lim \frac{1}{\ } \frac{(tv_1)^2 \, tv_2}{\ }$$

$$t \to 0 \quad t \qquad (tv_1)^4 + (tv_2)^2$$

$$= \lim_{t \to 0} \underbrace{\frac{1}{t} \quad \frac{t^3 \; v_1^2 v_2}{t^2 \left[\; t^2 v_1^4 + v_2^2 \right]}}$$

$$= \lim_{t \to 0} \boxed{\frac{v_1^2 v_2 \, \cancel{t}}{t^2 v_1^4 + v_2^2}}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{v_1^2}{v_2} & v_2 \neq 0 \\ 0 & v_2 = 0 \end{cases}$$

Dunque f ha derivate direzionali in tutte le direzioni. Osservo che

$$\mathbb{R}^2 \ni v \longmapsto \frac{\partial f}{\partial v}(0) = \begin{cases} v_1^2 / v_2 \\ 0 & v_2 = 0 \end{cases}$$

non è un' applicazione lineare.

Poi infine osservo che f NON è continua nel punto $(x,y) = (0,0)$:

$$\lim_{x \to 0} f(x, mx^2) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \cdot mx^2}{x^4 + m^2 x^4} = \frac{m}{1+m^2}$$

$y = mx^2 \qquad m \in \mathbb{R}$ fascio di parabole

Funzioni a valori vettoriali

$A \subset \mathbb{R}^n$ ins. aperto

$f : A \to \mathbb{R}^m \qquad n, m \in \mathbb{N}$

Avremo $f = (f_1, \dots, f_m)$

con $f_1, \dots, f_m : A \to \mathbb{R}$.

Meglio, pensiamo f

$$\longrightarrow \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} \quad \text{vettore colonna}$$

Diciamo che f è deriv. in un punto $x \in A$ se ciascuna f_i è deriv. in $x \in A$ $\forall i = 1, \dots, m$

Diciamo che f è deriv. in un punto $x \in A$ se ciascuna f_i è deriv. in $x \in A$ $\forall i = 1, \dots, m$

Scriveremo

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(x) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m .$$

DEF (Matrice Jacobiana). Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un ins. aperto e sia $f : A \to \mathbb{R}^m$ una funzione derivabile in $x \in A$. Allora possiamo definire la matrice Jacobiana di f in $x \in A$:

$$J_f(x) = Jf(x) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x) \\ \vdots \\ \nabla f_m(x) \end{pmatrix}$$

matrice $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{righe}}}{m} \times \underset{\substack{\uparrow \\ \text{colonne}}}{n}$

Funzioni differenziabili

Richiamo di algebra lineare

$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ trasformazione lineare,

$$T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n ; \mathbb{R}^m) .$$

Fisso le basi canoniche

$$e_1 \dots e_n \text{ di } \mathbb{R}^n$$

$$e_1 \dots e_m \text{ di } \mathbb{R}^m \leftarrow$$

Siano $T_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$ $j = 1, \dots, n$ i numeri reali definiti dalle seguenti formule

$$\longrightarrow \quad T e_j = \sum_{i=1}^{m} T_{ij} \, e_i \, . \leftarrow$$

Esiste una corrispondenza biunivoca tra $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n ; \mathbb{R}^m)$ e la matrice

$$(T_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \qquad \text{matrice } m \times n$$

Prendo $x \in \mathbb{R}^n$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$$

Allora

$$T(x) = T\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j \, T e_j = (\ldots)$$

$$= \begin{pmatrix} T_{11} & \cdots & T_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ T_{m1} & \cdots & T_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} T_{1j} e_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} T_{mj} e_j \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m .$$

Commento: la corrispondenza

$$T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m) \longleftrightarrow (T_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$$

dipende dalle basi fissate

DEF (Funzione differenziabile)

$A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $n \geq 1$, $x_0 \in A$ fissato,

$f : A \to \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$.

Diciamo che f è differenziabile nel punto $x_0 \in A$ se esiste $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ tale che

$$(*) \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0 .$$

Chiameremo $T := df(x_0)$ il differenziale di f nel punto $x_0 \in A$.

OSSERVAZIONI

① Se il differenziale esiste allora è unico.

Se $T, \hat{T} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ entrambe rendono vera ⊛

allora $T = \hat{T}$. Esercizio

(2) Se $n = 1$ ($m = 1$ non è importante)

In questo caso $df(x_0) = f'(x_0)$ che agisce come operatore lineare (come moltiplicazione)

$$\frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$$

(3) Supponiamo che $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sia una trasformazione lineare, $f = T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$.

Allora f è diff. in tutti i punti e inoltre

$$df(x_0) = T \quad (= f)$$

$$\frac{\overbrace{f(x) - f(x_0)} - T(x - x_0)}{|x - x_0|} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0 \qquad \equiv 0$$

cioè $df = T = f$ lineare

(4) Data $f: A \to \mathbb{R}^m$, $x_0 \in A$, allora

f è diff. in x_0 $\Longleftrightarrow$ le coordinate

$f_1, \dots, f_m : A \to \mathbb{R}$

sono differenziabili in x_0

E inoltre

$$df(x_0) = \begin{pmatrix} df_1(x_0) \\ | \\ df_m(x_0) \end{pmatrix}.$$