Lezione 23

mercoledì 3 maggio 2017 10:27

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ $n, m \in \mathbb{N}$

f è diff. in x_0 se $\exists\, T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ tale che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0.$$

Abbiamo chiamato

$$df(x_0) = T$$

il differenziale di f in x_0.

TEOR $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $f: A \to \mathbb{R}^m$, $x_0 \in A$.

Allora sono equivalenti:

A) f è diff. in x_0.

B) Esiste una trasf. lineare $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ ed esiste una funzione $E_{x_0}: A \to \mathbb{R}^m$ tali che

$$\circledast \quad f(x) = f(x_0) + \underbrace{T(x - x_0)} + \boxed{E_{x_0}(x)}$$

e inoltre

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{E_{x_0}(x)}{|x - x_0|} = 0} \quad \left(\Leftrightarrow E_{x_0}(x) = o(|x - x_0|) \underset{x \to x_0}{} \right).$$

Dim A) $\Rightarrow$ B).

Prendo $T = df(x_0)$

$$E_{x_0}(x) := f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)$$

e per la diff. di f in x_0

$$\lim_{x \to x_0} \frac{E_{x_0}(x)}{|x - x_0|} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0$$

B) Ma ora dato $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ come in B):

$$\frac{f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)}{|x - x_0|} = \frac{E_{x_0}(x)}{|x - x_0|} \to 0$$

$$\frac{f(x)-f(x_0)-T(x-x_0)}{|x-x_0|}=\frac{E_{x_0}(x)}{|x-x_0|}\xrightarrow[x\to x_0]{}0$$

e quindi è proprio $T=df(x_0)$. $\square$

<u>TEOR</u> Sia $f: A\to\mathbb{R}^m$ diff. nel punto $x_0\in A$.

Allora:

i) f è cont. in x_0

ii) f ha tutte le derivate direzionali in x_0 e inoltre $\forall v\in\mathbb{R}^n$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)=df(x_0)v.$$

In particolare $v\longmapsto\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ è una trasformazione lineare.

Dim i)

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}\Big(\underline{f(x_0)}+\underbrace{\boxed{T(x-x_0)}}_{0}+\underbrace{\boxed{E_{x_0}(x)}}_{0}\Big)$$

$$=f(x_0).$$

ii) $v\in\mathbb{R}^n$ $(v\neq0)$ uso B) con $x=x_0+tv$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)=\lim_{t\to0}\frac{\boxed{f(x_0+tv)}-f(x_0)}{t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\cancel{f(x_0)}+df(x_0)(tv)+E_{x_0}(x_0+tv)-\cancel{f(x_0)}}{t}$$

$$=\lim_{t\to0}\left(df(x_0)v+\underbrace{\frac{E_{x_0}(x_0+tv)}{t}}\right)$$

$$\Big\downarrow t \to 0$$

$$= df(x_0)\, V.$$

OSS. 1 Quando $n = 1$ allora

$$df(x_0)\, V = \langle \nabla f(x_0), V \rangle .$$

Fisso x_0 e $v \in \mathbb{R}^n$ con $|v| = 1$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = df(x_0)\, V = \langle \nabla f(x_0), V \rangle \leq$$

$$\leq |\nabla f(x_0)| \cdot |V| = |\nabla f(x_0)|$$

inoltre con la scelta

$$V = \frac{\nabla f(x_0)}{|\nabla f(x_0)|} \neq 0$$

trovo

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = |\nabla f(x_0)| .$$

Dunque f ha la max crescita nella direzione $\nabla f(x_0) / |\nabla f(x_0)|$ con velocità di crescita pari a $|\nabla f(x_0)|$.

OSS. 2 Data $f : A \to \mathbb{R}$ e dato $x_0 \in A$ voglio capire se f è differenziabile in x_0.

Faccio così:

- Prima calcolo il gradiente $\nabla f(x_0)$
- Poi faccio il test della differenziabilità

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle}{|x - x_0|} \overset{?}{=} 0 .}$$

Se il limite è $= 0$ allora f è diff. in x_0

Altrimenti no.

OSS. 3 Se $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è diff. in $x_0 \in \mathbb{R}^n$ allora

$$f(x) = \overbrace{f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle + E_{x_0}(x)}$$

Allora la parte "lineare" $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\frac{E_{x_0}(x)}{|x - x_0|} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$$

$$\varphi(x) = f(x_0) + \overbrace{\langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle}$$

è una funzione affine (parte lineare + traslazione)

Il grafico di φ:

$$gr(\varphi) = \left\{ (x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \boxed{\begin{aligned} x_{n+1} &= \varphi(x) \\ &= f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle \end{aligned}} \right\}$$

è un piano affine n-dimensionale detto piano tangente al grafico di f nel punto $\underbrace{(x_0, f(x_0))}_{\in\, gr(f)}$

L'equazione cartesiana del piano tg. al $gr(f)$ in $(x_0, f(x_0))$ è:

$$x_{n+1} = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle \leftarrow$$

OSS. 4 Sia ora $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diff. nel punto $x_0 \in A$.

Sia $(T_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ la matrice $m \times n$ associata alla trasformazione lineare $T = df(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$.

Allora

$$T_{ij} = \langle T e_j, e_i \rangle$$

$$= \langle df(x_0) e_j, e_i \rangle$$

$$= \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) \, , \, e_i \right\rangle$$

$$= \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)$$

Dunque la matrice T associata al differenziale $df(x_0)$ è la matrice Jacobiana $Jf(x_0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \right)_{\substack{i = \dots \\ j = \dots}}$

Quindi possiamo identificare

$$df(x_0) \equiv Jf(x_0).$$

ESERCIZI

ES 1 Calcolare tutti $m, n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ tali che $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ così definita

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^m y^n}{x^2+y^2} & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

1) Abbia tutte le derivate direzionali $0 \in \mathbb{R}^2$

2) sia differenziabile in $0 \in \mathbb{R}^2$.

Sol. (1) Sia $v \in \mathbb{R}^2$ una direzione

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(0 + \boxed{tv}) - \overset{0}{\overset{\parallel}{f(0)}}}{t} \qquad v = (v_1, v_2)$$

$$= \lim_{t \to 0} \left(\frac{1}{t}\right) \frac{t^{m} v_1^m \, t^{n} v_2^n}{t^2 v_1^2 + t^2 v_2^2}$$

$$= \lim_{t \to 0} \left(t^{m+n-3} \right) \left(\frac{v_1^m \cdot v_2^n}{v_1^2 + v_2^2} \right)$$

$$= \lim_{t \to 0} \left(\left(t \right) \left(\overline{v_1^2 + v_2^2} \right) \right)$$

$$= \begin{cases} \boxed{0} & m+n > 3 \\ \dfrac{v_1^m \, v_2^n}{v_1^2 + v_2^2} & m+n = 3 \\ \text{non esiste } \forall v & m+n < 3 \end{cases}$$

Risposta: f ha tutte le deriv. direzionali $\iff m+n \geq 3$.

(2) Basta esaminare il caso $m+n \geq 3$.

Se $m+n = 3$ noto che

$$v \longmapsto \frac{\partial f}{\partial v}(0) = \frac{v_1^m \, v_2^n}{v_1^2 + v_2^2}$$

NON è lineare.

Quindi f NON è diff. in $0 \in \mathbb{R}^2$ se $m+n = 3$.

Studio: $m+n > 3$.

Abbiamo in questo caso

Esiste

$$\nabla f(0) = (0, 0)$$

Provo con il test della differenziabilità:

$$0 \overset{?}{=} \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - \overset{0}{f(0)} - \langle \overset{0}{\nabla f(0)}, x - 0 \rangle}{|x - 0|}$$

$x = (x_1, x_2)$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{|x|}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x_1^m \, x_2^n}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \; (x_1^2 + x_2^2)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x_1^m \, x_2^n}{(x_1^2 + x_2^2)^{3/2}} \;\; \cancel{?} \; = 0$$

$$0 \leq \frac{(x_1^2)^{\frac{m}{2}} \, (x_2^2)^{\frac{n}{2}}}{(x_1^2 + x_2^2)^{3/2}} \leq \frac{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{m}{2}} \cdot (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{n}{2}}}{(x_1^2 + x_2^2)^{3/2}} =$$

$$= \left(x_1^2 + x_2^2\right)^{\frac{m}{2} + \frac{n}{2} - \frac{3}{2}}$$

$$= (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{m + n - 3}{2}}$$

Quindi se $m + n > 3$

$$\lim_{x = (x_1, x_2) \to (0,0)} (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{m+n-3}{2}} = 0$$

Per confronto i limiti con ? sono $= 0$.

Quindi:

$m + n > 3 \implies f$ è diff. in 0.

b

ES. 2 Sia $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y^2}{x^4+y^6} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

① Provare che f è cont su $\mathbb{R}^2$

② Stabilire se f è differenziabile in $(0,0)$.

Sol.

$$0 \leq \left| \frac{x^3 y^2}{x^4+y^6} \right| = \frac{|x|^3 y^2}{x^4+y^6} =$$

$$= \frac{(x^4)^{\frac{3}{4}} (y^6)^{\frac{2}{6}}}{x^4+y^6}$$

$$\leq (x^4+y^6)^{\frac{3}{4}+\frac{1}{3}-1} = (x^4+y^6)^{\frac{9+4-12}{12}} \quad \frac{1}{12}$$

$$\downarrow (x,y) \to (0,0)$$

$$0$$

Quindi f è cont. in $(0,0)$.

② Provo a calcolare le derivate parziali

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}$$

$$= 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \nabla f(0,0) = (0,0).$$

Procedo con il test della differenziabilità:

$$0 \overset{?}{=} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - \overset{0}{\overset{\parallel}{f(0,0)}} - \langle \overbrace{\nabla f(0,0)}^{=0}, (x,y)-(0,0)\rangle}{|(x,y)-(0,0)|}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{|(x,y)|}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 y^2}{\sqrt{x^2+y^2}\,(x^4+y^6)}$$