Lezione 24

lunedì 8 maggio 2017 10:42

- Valutazione Didattica

Termine Esercizio:
f è diff. in $0 \in \mathbb{R}^2$
se e solo se:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 y^2}{\sqrt{x^2+y^2}\,(x^4+y^6)} = 0$$

$$\parallel$$

$$f(x,y)$$

Provo con il test delle rette:

$$y = mx \qquad m \in \mathbb{R}$$

Quindi

$$f(x,mx) = \frac{x^3\, m^2 x^2}{\sqrt{x^2+m^2x^2}\,(x^4+m^6x^6)}$$

$$= \frac{x^5}{|x|\,x^4}\,\frac{m^2}{\sqrt{1+m^2}\,(1+m^6x^2)}$$

$$= \frac{x}{|x|}\,\frac{m^2}{\sqrt{1+m^2}\,(1+m^6x^2)}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x,mx) = \frac{m^2}{\sqrt{1+m^2}}$$ dipende da m

$\neq 0$

è solo per $x \to 0^+$

$\Longrightarrow$ f NON È diff. in $0 \in \mathbb{R}^2$.

$\square$

ES 3 Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = (x^3 + y^3)^{1/3}$$

① Studiare la cont. di f su $\mathbb{R}^2$

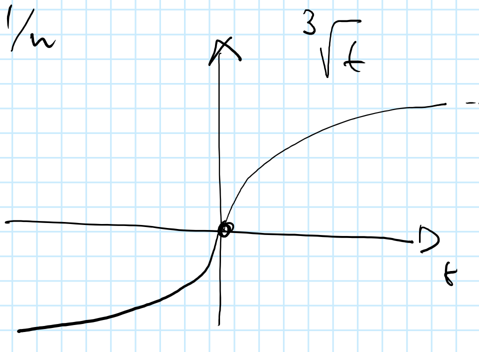
② Calcolare - se esistono - le derivate parziali
tutte le derivate direzionali di f in 0.

③ Stabilire se f è differenziabile in 0.

Svolg. ① Sia $n \in \mathbb{N}$ dispari. Allora la funzione

$$t \longmapsto \sqrt[n]{t} = t^{1/n}$$

è definita $\forall t \in \mathbb{R}$ ed è continua su tutta la retta $\mathbb{R}$.



Ma allora la funzione

$$(x,y) \longrightarrow \sqrt[3]{x^3 + y^3} \quad \text{è}$$

continua su tutto $\mathbb{R}^2$ in quanto composizione di funz. cont..

② Calcolo:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - \overset{0}{\overset{\shortparallel}{f(0,0)}}}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \sqrt[3]{x^3 + 0^3}$$

$$= \lim_{x \to 0} 1 = 1$$

Analog:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1 .$$

Più in generale, calcoliamo per $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ generico:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(0+tv) - \overset{0}{\overset{\shortparallel}{f(0)}}}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \sqrt[3]{t^3 v_1^3 + t^3 v_2^3}$$

$$= \lim_{t \to 0} \sqrt[3]{v_1^3 + v_2^3} = \sqrt[3]{v_1^3 + v_2^3}$$

③ Se f fosse diff. in $0 \in \mathbb{R}^2$

~~dovrebbe~~ essere:

$$\forall v \qquad \sqrt[3]{v_1^3 + v_2^3} = \frac{\partial f}{\partial v}(0) = df(0)v = \langle \overset{(1,1)}{\overset{\shortparallel}{\nabla f(0)}}, v \rangle =$$

$$= v_1 + v_2 \qquad \forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}$$

$$= v_1 + v_2 \quad \forall\, v_1, v_2 \in \mathbb{R}$$

FALSO.

Quindi f non è diff. in 0.

ES 4 Consideriamo la superficie n dimensionale

$$M = \{ (\underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\cap}{x}}, \underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap}{x_{n+1}}}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \underbrace{x_{n+1}^2 - |x|^2 - 1 = 0}_{\text{Equazione di definizione } M} \}$$

Calcolare il piano tangente ad M in un suo generico punto.

Svolg. Osservo che le coordinate dei punti in M verificano

$$x_{n+1}^2 = 1 + |x|^2 \iff x_{n+1} = \pm\sqrt{1+|x|^2}$$

Quindi M è data dall'unione dei grafici delle due funzioni:

$$f(x) = \sqrt{1 + |x|^2} \quad \circledast$$

$$g(x) = -\sqrt{1 + |x|^2}$$

Preso $x_0 \in \mathbb{R}^n$ avremo $(x_0, f(x_0)) = (x_0, \sqrt{1+|x_0|^2}) \in M$

Calcolo il piano tangente ad M in questo punto. L'equazione cartesiana del piano tangente ad M (al grafico di f) in questo punto è:

$$x_{n+1} = f(x_0) + \langle \underline{\underline{\nabla f}}(x_0), x - x_0 \rangle$$

nelle variabili (x, x_{n+1}).

Calcolo il gradiente di f:

$$f(x) = \sqrt{1+|x|^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+|x|^2}} \cdot 2x_i = \frac{x_i}{\sqrt{1+|x|^2}}$$

$i = 1, \dots, n$

$$\Downarrow$$

$$\nabla f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+|x|^2}}$$

Dunque l'eq. cartesiana nel punto x_0 è:

$$x_{n+1} = \sqrt{1+|x_0|^2} + \left\langle \frac{x_0}{\sqrt{1+|x_0|^2}}, x - x_0 \right\rangle$$

$$= \sqrt{1+|x_0|^2} + \left\langle \frac{x_0}{\sqrt{1+|x_0|^2}}, x \right\rangle - \frac{|x_0|^2}{\sqrt{1+|x_0|^2}}$$

$$= \frac{1+\cancel{|x_0|^2} - \cancel{|x_0|^2}}{\sqrt{1+|x_0|^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+|x_0|^2}} \langle x_0, x \rangle$$

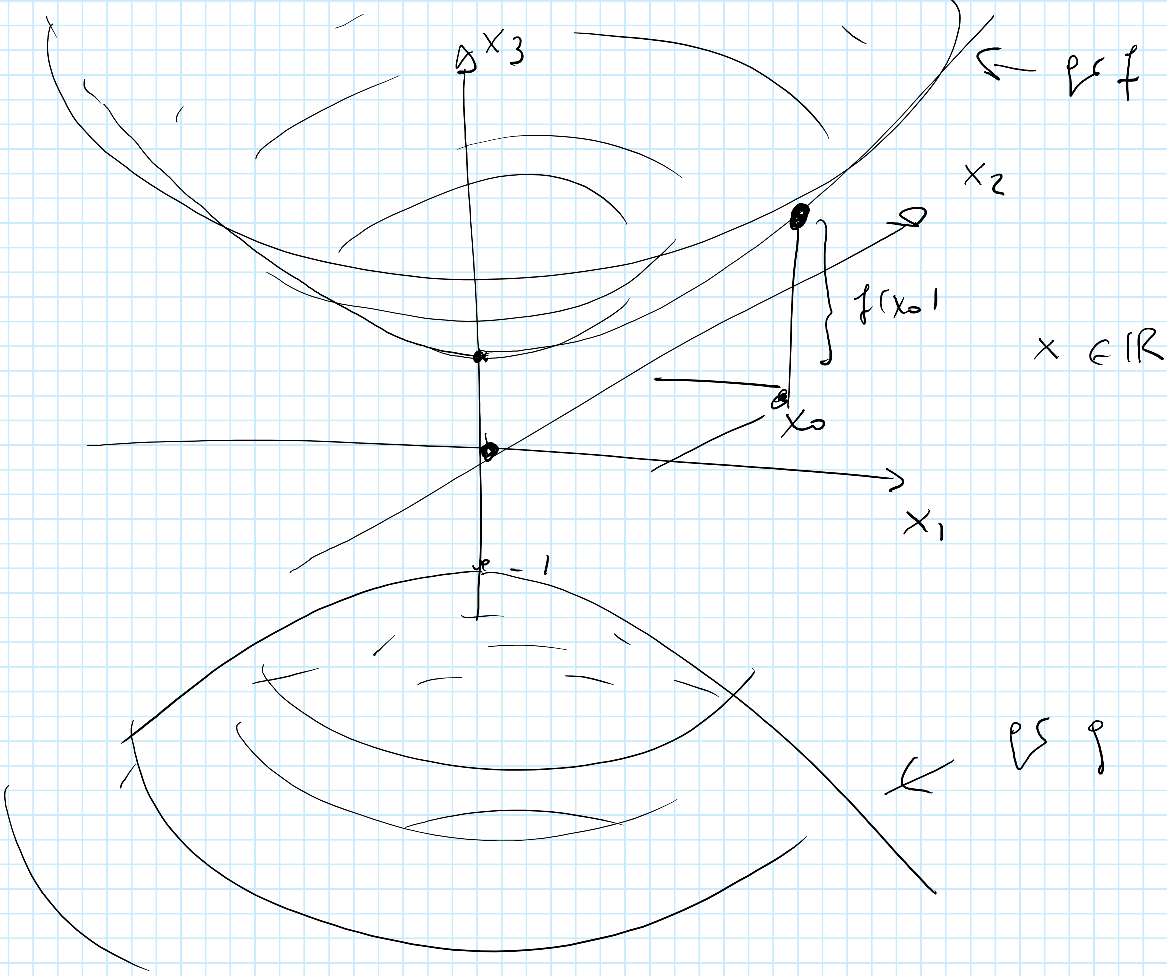
$$= \frac{1 + \langle x_0, x \rangle}{}$$

$$= \frac{1 + (x_0, x)}{\sqrt{1+|x_0|^2}}$$

Ad es. con $x_0 = 0$ trovo

$$x_{n+1} = 1 .$$

Per $n=2$ l'insieme M è l'unione di due falde di iperboloidi di rotazione:



ES 5 Siano $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con $f(0) = g(0) = 0$

per $x^2 + y^2 \neq 0$

$$f(x,y) = x \min\left(\frac{|y|^\alpha}{x^4+y^2} \right)$$

$$f(x,y) = x \sin\left(\frac{|y|^{\alpha}}{x^4+y^2}\right) \qquad (\leftarrow)$$

$$g(x,y) = \frac{x\,|y|^{\beta}}{x^2+y^4}$$

$\alpha, \beta > 0$.

① Calcolare tutti gli $\alpha > 0$ tali che f sia diff. in $(0,0)$

② Calcolare tutti i $\beta > 0$ tali che g sia diff. in $(0,0)$

Svolg. Facciamo la parte ①.

Calcolo il gradiente di f in $(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - \overset{0}{\overset{\shortparallel}{f(0,0)}}}{x}$$

$$= 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0,y) - \overset{0}{\overset{\shortparallel}{f(0,0)}}}{y} = 0$$

$$\longrightarrow \quad \nabla f(0) = (0,0)$$

Procedo con il test della differenziabilità:

$$0 \overset{?}{=} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - \overset{0}{\overset{\shortparallel}{f(0,0)}} - \overset{0}{\overset{\shortparallel}{\langle \nabla f(0), (x,y)\rangle}}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

≤ 1

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x \sin\left(\frac{|y|^\alpha}{x^4+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

≤ 1

Rozzo

Mi ricordo che

$$|\sin t| \leq |t| \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Dunque

$$\left| \cdot \right| \leq \frac{|x| \, |y|^\alpha}{\sqrt{x^2+y^2} \cdot (x^4+y^2)} \leq$$

$$\leq \frac{|y|^\alpha}{(x^4+y^2)} \leq \frac{(|y|^2+x^4)^{\frac{\alpha}{2}}}{(x^4+y^2)}$$

$$= (y^2+x^4)^{\frac{\alpha}{2}-1}$$

Ho scoperto che per $\frac{\alpha}{2}-1>0 \iff \alpha>2$ si ha

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (y^2+x^4)^{\frac{\alpha}{2}-1} = 0$$

e per confronto è $=0$ anche il limite

inutile.

1^ Conclusione

$$\alpha > 2 \implies f \text{ è diff.}$$

nel punto $0 \in \mathbb{R}^2$.

Studio il caso $\boxed{\alpha \leq 2}$:

$$0 \overset{?}{=} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin\left(\frac{|y|^\alpha}{x^4+y^2}\right)$$

Provo a restringere il limite su $y = x$

$$0 \overset{?}{=} \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x^2+x^2}} \sin\left(\frac{|x|^\alpha}{x^4+x^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\boxed{\frac{|x|^\alpha}{x^2}}\cdot\frac{1}{x^2+1}\right)$$

Qui è $\alpha \leq 2$ In questo caso

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x|^\alpha}{x^2}\,\frac{1}{x^2+1} = \begin{cases} 0 & \alpha > 2 \\ 1 & \alpha = 2 \\ +\infty & \alpha < 2 \end{cases}$$

ORA vedo chiaramente che per $\alpha \leq 2$ il limite in questione NON è $= 0$.

Ho raggiunto questa seconda conclusione

<u>2^ concl</u> :

$$\alpha \leq 2 \implies f$$ <u>NON</u> è diff. in 0. $\square$