Differenziale della funzione composta

(1) Siano $f, g : A \to \mathbb{R}^m$ con $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto e sia $x_0 \in A$,

Se f e g sono diff. entrambe nel punto x_0 allora $f+g : A \to \mathbb{R}^m$ è diff. in x_0

$$d(f+g)(x_0) = df(x_0) + dg(x_0)$$

(2) Siano ora $f, g : A \to \mathbb{R}$ diff. in x_0. Allora la funzione $f \cdot g : A \to \mathbb{R}$ è diff. in x_0 e inoltre

$$d(f \cdot g)(x_0) = f(x_0)\, dg(x_0) + g(x_0)\, df(x_0)$$

<u>TEOR</u> Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto e $f : A \to \mathbb{R}^m$ diff in $x_0 \in A$. Siano poi $B \subset \mathbb{R}^m$ aperto con $f(x_0) \in B$ e $g : B \to \mathbb{R}^k$ differenziabile in $f(x_0)$, [Supponiamo inoltre che $f(A) \subset B$,] Allora la funzione composta $g \circ f : A \to \mathbb{R}^k$ è (ben definita e) differenziabile nel punto $x_0 \in A$ e

$$\underset{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^k)}{\underset{\Uparrow}{d(g \circ f)(x_0)}} = \underset{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^k)}{\underset{\Uparrow}{dg(f(x_0))}} \circ \underset{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)}{\underset{\Uparrow}{\boxed{df(x_0)}}} \qquad \circledast$$

Equivalentemente:

$$J(g \circ f)(x_0) = Jg(f(x_0)) \cdot Jf(x_0) \quad (*)$$

matrice $k \times n$

prodotto matrice

$k \times m$ $\quad$ $m \times n$

Dim. Dimostro la $(*)$. $\exists$

- $f(x) = f(x_0) + T(x - x_0) + F_{x_0}(x)$, $\quad x \in A$

dove $T = df(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$

e

$$\frac{\quad}{|x - x_0|} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$$

- $g(y) = g(\overset{y_0 \,//}{f(x_0)}) + S(y - y_0) + G_{y_0}(y)$, $\quad y \in B$

dove $S = dg(f(x_0)) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^k)$

$$\frac{G_{y_0}(y)}{|y - y_0|} \xrightarrow[y \to y_0]{} 0$$

Formo la composizione:

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

$$= g(f(x_0)) + S(f(x) - f(x_0)) +$$

$$+ G_{f(x_0)}(f(x)), \quad x \in A$$

$$= g\circ f(x_0) + S\left(\underline{T(x-x_0)} + F_{x_0}(x)\right) + G_{f(x_0)}\left(f(x)\right)$$

$$g\circ f(x) = \underline{g\circ f(x_0)} + S\circ T(x-x_0) + S\left(F_{x_0}(x)\right) + G_{f(x_0)}\left(f(x)\right)$$

Definisco

$$E_{x_0}(x) = S\left(F_{x_0}(x)\right) + G_{f(x_0)}\left(f(x)\right)$$

se

$$\boxed{\frac{E_{x_0}(x)}{|x-x_0|} \xrightarrow[x\to x_0]{} 0}$$

ho dimostrato che $g\circ f$ è diff. in x_0

con $d(g\circ f)(x_0) = S\circ T = dg(y_0)\circ df(x_0)$

ORA:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{S\left(F_{x_0}(x)\right)}{|x-x_0|} = \lim_{x\to x_0} S\left(\underbrace{\frac{F_{x_0}(x)}{|x-x_0|}}_{\xrightarrow[x\to x_0]{} 0}\right)$$

$$= S\left(\lim_{x\to x_0} \ldots\right)$$

$$= S(0) = 0.$$

Poi

$$\frac{G_{f(x_0)}(f(x))}{|x-x_0|} = \frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|} \boxed{\frac{G_{f(x_0)}(f(x))}{|f(x)-f(x_0)|}}$$

$$\boxed{\frac{G_{f(x_0)}(f(x))}{|f(x)-f(x_0)|}} \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$$

dove inoltre

perché $x \to x_0 \Rightarrow f(x) \to f(x_0)$

$$\frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|} = \frac{|T(x-x_0)+F_{x_0}(x)|}{|x-x_0|}$$

$$= \left| \underbrace{T\left(\frac{x-x_0}{|x-x_0|}\right)}_{\text{è limitato}} + \frac{F_{x_0}(x)}{|x-x_0|} \right|$$

$$\frac{F_{x_0}(x)}{|x-x_0|} \to 0$$

Questo prova che

$$\frac{F_{x_0}(x)}{|x-x_0|} \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$$

$\square$

<u>ESEMPIO</u>: Derivata di una funzione lungo una curva.

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto con $f: A \to \mathbb{R}$ differenziabile in tutti i punti.

Sia poi $\gamma : [0,1] \to A \subset \mathbb{R}^n$, una curva di classe C^1. È ben definita la funzione

$$[0,1] \ni t \longrightarrow f(\gamma(t)) \in \mathbb{R}$$

ed è derivabile $\forall t \in [0,1]$ con derivata

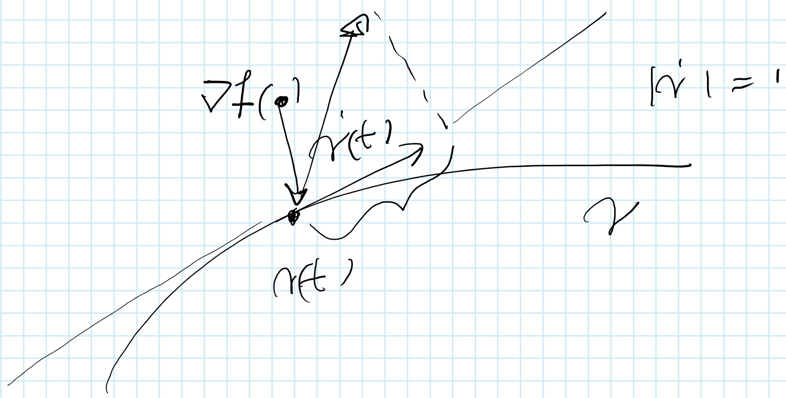
$$\frac{d}{dt}\left(f(\gamma(t))\right) = J(f \circ \gamma)(t)$$

qui $\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ | \\ \gamma_n \end{pmatrix}$

$$= Jf(\gamma(t))\, \underline{\underline{J\gamma(t)}}$$

$$= \langle \nabla f(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle \longleftarrow$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t))\, \dot{\gamma}_i(t)$$



<u>ESEMPIO</u> $f : A \to \mathbb{R}$ diff. nell'aperto $A \subset \mathbb{R}^n$

Fissato $t \in \mathbb{R}$, l'insieme

$$M_t = \{ x \in A : f(x) = t \}$$

si dice insieme di livello t della funz. f.

Fisso un t. Supponiamo che $\gamma : (-\delta, \delta) \to A$ $\delta > 0$

sia una curva C^1 tale che

- $\gamma(0) = x_0 \in M_t$
- $\gamma(s) \in M_t \quad \forall s \in (-\delta, \delta)$

"In un certo modo $\dot\gamma(0)$ è tangente ad M_t nel punto $\underset{\gamma(0)}{\overset{\|}{x_0}}$".

Formula stabilita sopra

Poi $$0 = \frac{d}{ds} \underbrace{f(\gamma(s))}_{\equiv t} \Big|_{s=0} = \langle \nabla f(x_0), \dot\gamma(0) \rangle$$

ovvero $\nabla f(x_0) \perp \dot\gamma(0)$.

Ho capito che $\nabla f(x_0)$ è un vettore che punta nella direzione ortogonale alla "superficie" M_t nel punto $x_0 \in M_t$.

Teorema del valor medio

TEOR: $f : A \to \mathbb{R}$ diff. in $A \subset \mathbb{R}^n$ e siano $x, y \in A$ tali che $[x,y] := \{ \underline{tx + (1-t)y} : t \in [0,1] \}$
$$[x,y] \subset A.$$

Allora esiste un punto $z \in [x,y]$ tale che

$$f(x) - f(y) = \langle \nabla f(z), x - y \rangle .$$

Dim. Basta studiare $\underset{[0,1]}{t} \longmapsto f(tx + (1-t)y) =: \varphi(t)$

e fare Lagrange per φ.

e con Lagrange per φ. ($[0,1]$)

$\square$

TEOR $f : A \to \mathbb{R}^m$ diff. in A, $x, y \in A$ con $[x,y] \subset A$. Allora per ogni $v \in \mathbb{R}^m$ esiste un punto $z \in [x,y]$ tale che

$$\langle f(x) - f(y), v \rangle = \langle \underbrace{Jf(z)}_{=\,df(z)}(x-y), v \rangle .$$

Dim. Saltare.

DEF La norma di una trasformazione lineare $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ si definisce in questo modo:

$$\|T\| := \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ |x| \leq 1}} |Tx| \qquad (< \infty)$$

OSSERVAZIONE Se $x \in \mathbb{R}^n$ è generico, $x \neq 0$, allora

$$\left| T\left(\frac{x}{|x|}\right) \right| \leq \|T\|$$

$$= \left| \frac{1}{|x|} T(x) \right|$$

$$= \frac{1}{|x|} |T(x)|$$

e quindi

$$|Tx| \leq \|T\| \cdot |x| \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

COROLLARIO Sia $f: A \to \mathbb{R}^m$ diff. in A
siano $x, y \in A$ con $[x,y] \subset A$.
Allora esiste $z \in [x,y]$ tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq \|df(z)\| \cdot |x-y|,$$

dove $\|df(z)\|$ è la norma di $df(z) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$!

Dim $\forall v \in \mathbb{R}^m$ esiste $z \in [x,y]$ tale che

$$\langle f(x) - f(y), v \rangle = \langle df(z)(x-y), v \rangle.$$

Scelgo proprio $v = f(x) - f(y)$ e quindi

$$|f(x) - f(y)|^2 = \langle df(z)(f(x) - f(y)), x-y \rangle$$
$$\overset{CS}{\leq} \underbrace{|df(z)(f(x) - f(y))|}\cdot |x-y|$$
$$\leq \|df(z)\| \, |x-y| \, |f(x) - f(y)|$$

$$\Downarrow$$

$$|f(x) - f(y)| \leq \|df(z)\| \cdot |x-y|.$$

$\square$

OSS se poi $\|df(z)\| \leq L < \infty \quad \forall z \in A$
Allora

$$|f(x) - f(y)| \leq L \, |x-y|.$$

Funzioni di classe C^1

Diciamo che $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, è una funzione di classe C^1 e scriveremo

$$f \in C^1(A)$$

se esistono tutte le derivate parziali

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x), \qquad x \in A, \quad i = 1, \dots, n$$

e sono funzioni continue in A.

TEOR Se $f \in C^1(A)$ allora f è diff. in tutti i punti di A.

Riassunto della situazione

$\boxed{f \in C^1(A)}$ $\Longrightarrow$ f diff. in A

$\boxed{f \in C^1(A)}$ $\not\Longleftarrow$ f diff. in A

f diff. in A $\Downarrow$ f ha tutte le derivate direzionali (parziali)

f diff. in A $\not\Uparrow$ f ha tutte le derivate direzionali (parziali)

f diff. in A $\Longrightarrow$ f è cont.

f è cont. $\not\Longrightarrow$ f diff. in A

f ha tutte le derivate direzionali (parziali) $\not\Longrightarrow$ f è cont.