Lezione 27

lunedì 15 maggio 2017 10:30

TEOR. Dato $K \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, allora sono eq.:

(A) K è chiuso e limitato

(B) K è compatto

Proveremo la parte significativa:

$$(A) \Rightarrow (B).$$

(Infatti (B) $\Rightarrow$ (A) è sempre vero $\forall$ SM)

Sia $x^h \in \mathbb{R}^n$ una successione di punti, $h \in \mathbb{N}$, tutti contenuti in $K \subset \mathbb{R}^n$ chiuso e limit.

Avremo

$$x^h = (x_1^h, \dots, x_n^h)$$

Allora $(x_1^h)_{h \in \mathbb{N}}$ è una succ. di numeri reali.

Ma

K limitato $\Rightarrow$ $(x_1^h)_{h \in \mathbb{N}}$ è limitata in $\mathbb{R}$

Ma per il Teor. di BW esiste una s.s. $(x_1^{h_k})_{k \in \mathbb{N}}$ che converge

$$x_1^{h_k} \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} x_1^\infty \in \mathbb{R}$$

Data questa selez. di indici $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$ considero la nuova succ. reale

$$(x_2^{h_k})_{k \in \mathbb{N}}$$

È limitata e quindi esiste una ulteriore sotto-selezione di indici che chiamo $(h_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ tale che

$$x_2^{h_{k_j}} \xrightarrow[j \to \infty]{} x_2^\infty \in \mathbb{R}$$

Iterando il procedimento (selezionando tante sottosuccessioni) troveremo delle coordinate limite x_i^∞ $i = 1 \dots n$ e una selez. di indici che chiamo $(h_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ tale che

$$x_i^{h_\ell} \xrightarrow[\ell \to \infty]{} x_i^\infty \qquad \forall i = 1 \dots n$$

ovvero

$$x^{h_\ell} \xrightarrow[\ell \to \infty]{} x^\infty = (x_1^\infty \dots x_n^\infty) \in \mathbb{R}^n$$

Ma

$$\left.\begin{array}{l} x^{h_\ell} \in K \\ \forall h_\ell \\ K \text{ è chiuso} \\ x^{h_\ell} \xrightarrow[\ell \to \infty]{} x^\infty \end{array}\right\} \Rightarrow x^\infty \in K.$$

$\square$

T<u>EOR</u> Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici e sia $f : X \to Y$ una funzione continua. Allora:

$$\begin{array}{c} K \subset X \\ \text{è compatto} \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c} f(K) \subset Y \\ \text{è compatto} \end{array}$$

Dim. Sia $y_n \in f(K)$, $n \in \mathbb{N}$, una successione di punti.

Dunque $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists$ $x_n \in K$ tale che

$$f(x_n) = y_n$$

Siccome K è compatto $\exists\, (x_{n_\ell})_{\ell \in \mathbb{N}}$ ed esiste $x^\infty \in K$ tale che

$$x_{n_\ell} \xrightarrow[\ell \to \infty]{} x^\infty \in K$$

Ma siccome f è continua:

$$y_{n_\ell} = f(x_{n_\ell}) \xrightarrow[\ell \to \infty]{} \underbrace{f(\overset{K}{\overset{\cup}{x^\infty}})}_{\substack{\cap \\ f(K)}}$$

$\square$

COROLLARIO Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ compatto e sia $f : K \to \mathbb{R}$ continua. Allora f ammette valore max e valore min su K. Ovvero: $\exists$ $x_0, x_1 \in K$ tali che

$$f(x_0) = \min_{x \in K} f(x),$$

$$f(x_1) = \max_{x \in K} f(x).$$

Dim. In effetti $f(K) \subset \mathbb{R}$ è compatto e quindi è sia chiuso che limitato.

$$\sup f(K) = \sup f(x) < \infty$$

$$\sup f(K) = \sup_{x \in K} f(x) < \infty$$

$$\boxed{\inf f(K) = \inf_{x \in K} f(x) > -\infty} .$$

Quindi $f(K)$ è limitato.

Ma essendo $f(K) \subset \mathbb{R}$ chiuso

$$\sup f(K) = \max f(K)$$
$$\inf f(K) = \min f(K) .$$

$\square$

Punti critici, Punti di max/min locale

DEF Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme e sia $f : A \to \mathbb{R}$.

(1) Un p.to $x_0 \in A$ si dice punto di massimo locale della funzione f se esiste $r > 0$ tale che

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in A \cap B_r(x_0) .$$

Se poi $f(x) < f(x_0)$ $\forall x \in A \cap B_r(x_0)$, $x \neq x_0$

diremo che x_0 è un p.to di max locale stretto.

(2) $x_0 \in A$ si dice p.to di min locale se $\exists\, r > 0$ tale che

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in A \cap B_r(x_0) .$$

È stretto se $f(x) > f(x_0)$ $\forall x \in A \cap B_r(x_0)$

$x \neq x_0$

DEF (Punto Critico). Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto. Un punto $x_0 \in A$ si dice punto critico di una funzione $f \in C^1(A)$ se

$$\nabla f(x_0) = 0$$

DEF (Forme quadratiche (semi)definite)

Sia B una matrice reale $n \times n$ simmetrica, $B = B^t$.

i) Diremo che B è semidefinita positiva se

$$\langle Bv, v \rangle \geq 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

Scriveremo in questo caso $B \geq 0$.

ii) Diremo che B è definita positiva se

$$\langle Bv, v \rangle > 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n, \ v \neq 0.$$

Scriveremo: $B > 0$.

Poi diremo che B è (semi)definita negativa se $-B \geq 0$ (ovvero $-B > 0$).

Lemma Sia B una matrice reale $n \times n$ simmetrica.

Sono equivalenti:

① $B > 0$

(2) Esiste $m > 0$ tale che $(Bv, v) \geq m |v|^2$
$\forall v \in \mathbb{R}^n$.

Dim (2) $\Rightarrow$ (1) Banale:

se $v \neq 0$ $\quad \langle Bv, v \rangle \geq m \underbrace{|v|^2}_{> 0} > 0$.

(1) $\Rightarrow$ (2). L'insieme $K = \{ x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1 \}$
è limitato e chiuso $\Rightarrow$ K è compatto.

Consideriamo $f : K \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \underbrace{\langle Bx, x \rangle}_{\text{polinomio di grado 2}} \quad x \in K$$

f è continua.
Quindi esiste $x_0 \in K$ tale che $\quad$ perché $B > 0$

$$f(x) \geq f(x_0) = \underbrace{\langle Bx_0, x_0 \rangle}_{=: m} > 0 \quad \forall x \in K$$

$x_0 \neq 0$

Ora se $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$, allora

$$\frac{v}{|v|} \in K \quad \forall v \neq 0$$

Ma allora

$$= \left\langle B \frac{v}{|v|}, \frac{v}{|v|} \right\rangle \geq m > 0$$

$$= \frac{1}{|v|^2} \langle Bv, v \rangle \geq m$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\langle Bv, v \rangle \geq m |v|^2}$$

$\forall v \in \mathbb{R}^n$. $\square$

OSS 1 Siano $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$ gli autovalori reali della matrice simmetrica B e siano $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ corrispondenti autovettori $B v_i = \lambda_i v_i$ base ortonormale.

Allora per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ avremo

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \qquad \alpha_i \in \mathbb{R}$$

Dunque

$$\langle Bx, x \rangle = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \alpha_j \langle B v_i, v_j \rangle =$$

$$= \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \alpha_j \lambda_i \underbrace{\langle v_i, v_j \rangle}_{= \delta_{ij}}$$

$$= \sum^n \alpha_i^2 \lambda_i \quad \geq 0$$

$$= \sum_{i=1} \alpha_i^2 \lambda_i \geq 0 \quad \forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$$

Da questa formula deduco che

(1) $B \geq 0 \iff \lambda_1 \geq 0$

$\quad$ è più piccolo autovalore.

(2) $B > 0 \iff \lambda_1 > 0$.

OSS. 2 Sia B una matrice 2 x 2.

(1) $B \geq 0 \iff \det B = \lambda_1 \lambda_2 \geq 0$

$\quad$ e $\operatorname{tr} B = \lambda_1 + \lambda_2 \geq 0$

Conti:

$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \geq 0 \implies \lambda_1$ e λ_2 hanno segno concorde

ovvero:

$\lambda_1 \geq 0$ e $\lambda_2 \geq 0$

o

$\lambda_1 \leq 0$ e $\lambda_2 \leq 0$

Poi $\lambda_1 + \lambda_2 \geq 0$

Se fosse $\lambda_1 < 0$ allora dovremmo avere

$\lambda_2 < 0$ oppure $\lambda_2 \leq 0$

impossibile $\quad$ impossibile.

(2) $B < 0$ se e solo se $\det B = \lambda_1 \lambda_2 > 0$

$\quad \operatorname{tr} B = \lambda_1 + \lambda_2 \leq 0$

(3) Se infine $\det B < 0$ allora la matrice

B non è né semidefinita positiva

né " negativa.

TEOR (Condizioni necessarie di estremalità)

Sia $x_0 \in A$ con $A \subset \mathbb{R}^n$ insieme aperto e sia $f \in C^2(A)$. Se $x_0 \in A$ è un p.to di minimo locale di f in A allora:

i) $\nabla f(x_0) = 0$ (CN di min. del 1° ordine)

ii) $Hf(x_0) \geq 0$ (CN di min. del 2° ordine).

DIM: Esiste $r > 0$ tale che

$$B_r(x_0) \subset A \quad \text{e} \quad f(x) \geq f(x_0)$$

aperto $\qquad \forall x \in B_r(x_0)$

Poi

$$\frac{\overbrace{f(x_0 + te_i)}^{\in B_r(x_0)} \overbrace{- f(x_0)}^{\geq 0}}{t} \geq 0 \qquad \forall t > 0 \text{ piccolo}$$

$$\frac{\cdots}{t} \leq 0 \qquad t < 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \geq 0$$

,

∂x_i

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \leq 0$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

$$\Longrightarrow \quad \nabla f(x_0) = 0.$$

(ii) Dalla formula di Taylor:

$$f(x) = \underline{\underline{f(x_0)}} + \langle \underset{0}{\nabla f(x_0)}, x - x_0 \rangle + \frac{1}{2}\langle Hf(x_0)(\underline{\underline{x - x_0}}), \underline{\underline{x - x_0}} \rangle + o(|x - x_0|^2)$$

$$x \to x_0$$

Prendo $v \in \mathbb{R}^n$ generico

$$x = x_0 + tv$$

$$0 \leq f(x_0 + tv) - f(x_0) = \frac{1}{2} t^2 \langle Hf(x_0)v, v \rangle + o(|tv|^2)$$

per t piccolo

$\forall t$

$$0 \leq \frac{1}{2}\langle Hf(x_0)v, v \rangle + o(1) \quad \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$$

$$o(1) = \frac{o(|tv|^2)}{t^2} \longrightarrow 0$$

$$o(1) = \frac{\qquad}{t^2} \to 0$$

lim $t \to 0$ meno

$$0 \leq \langle Hf(x_0)\, v, v \rangle \quad \forall v \in \mathbb{R}^n.$$