Lezione 28

martedì 16 maggio 2017   08:49

TEOR (Cond. suff. per minimalità locale)

Sia $x_0 \in A$ con $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto e sia $f \in C^2(A)$.
Supponiamo che:

i) $\nabla f(x_0) = 0$ (x_0 p.to critico)

ii) $Hf(x_0) > 0$ (è definita positiva).

Allora x_0 è un p.to di minimo locale stretto.

DIM. Per Taylor 2° ordine con resto Peano:

$$f(x) \underset{x \to x_0}{=} f(x_0) + \langle \cancel{\nabla f(x_0)}^{0}, x - x_0 \rangle + \frac{1}{2}\langle Hf(x_0)(x-x_0), x - x_0 \rangle + o(|x-x_0|^2)$$

Siccome $Hf(x_0) > 0 \implies \exists\, m > 0$ tale che

$$\langle Hf(x_0) v, v \rangle \geq m |v|^2 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

noi prenderemo $v = x - x_0$.
Usando $\nabla f(x_0) = 0$ trovo

$$f(x) \geq f(x_0) + \frac{m}{2} |x-x_0|^2 + o(|x-x_0|^2)$$

per x vicino x_0

$$f(x) - f(x_0) \geq |x-x_0|^2 \left(\frac{m}{2} + o(1) \right)$$

$$f(x) - f(x_0) \geq |x - x_0|^2 \Big(\frac{m}{2} + \underbrace{o(1)}_{\substack{\downarrow\ x \to x_0 \\ 0}} \Big)$$

Esiste $r > 0$ tale che se

$$|x - x_0| < r \implies \frac{m}{2} + o(1) \geq \frac{m}{4} > 0$$

$$x \in B_r(x_0)$$

Dunque per $x \in B_r(x_0)$

$$f(x) - f(x_0) \geq \frac{m}{4} |x - x_0|^2 > 0$$

se $x \neq x_0$

$\square$

DEF

- $A \subset \mathbb{R}^n$ è convesso se

$$x, y \in A \implies [x, y] \subset A$$

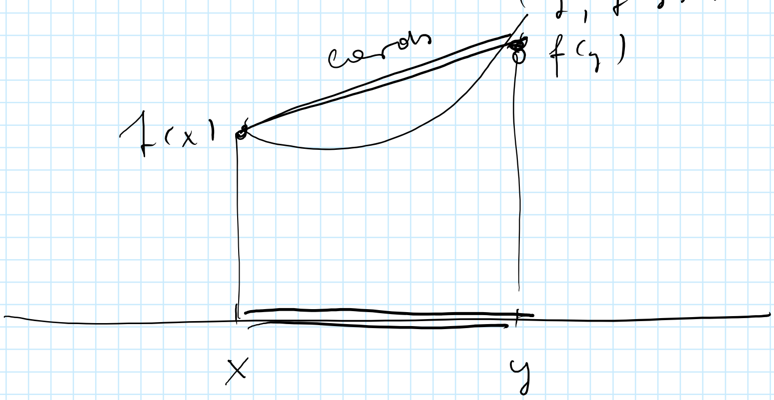
- Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ convesso. Una funzione $f \in C^2(A)$ si dice convessa se

$$Hf(x) \geq 0 \quad \forall x \in A.$$

OSS f convessa $\iff$ il grafico di f sta sopra il piano tangente al grafico in ogni punto

OSS f convessa $\iff$ il grafico di f sta sopra il piano tangente al grafico in ogni punto

$\iff$ $\forall x, y \in A$ il grafico di f sopra il segmento $[x,y]$ sta sotto la "corda" fra $(x, f(x))$ e $(y, f(y))$



TEOR Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto convesso e sia $x_0 \in A$. Sia $f \in C^2(A)$ una funzione tale che:

i) $\nabla f(x_0) = 0$

ii) f è convessa in A.

Allora x_0 è un p.to di min assoluto

(globale)

DiM: Taylor con Lagrange $\forall x \in A \ \exists z \in [x_0, x]$

$$f(x) = f(x_0) + \langle \overset{0}{\nabla f(x_0)}, x - x_0 \rangle$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2} \langle \underbrace{Hf(z)}_{\geq 0} (x - x_0), x - x_0 \rangle}_{\geq 0 \quad \forall x \in A}$$

$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in A.$

$\square$

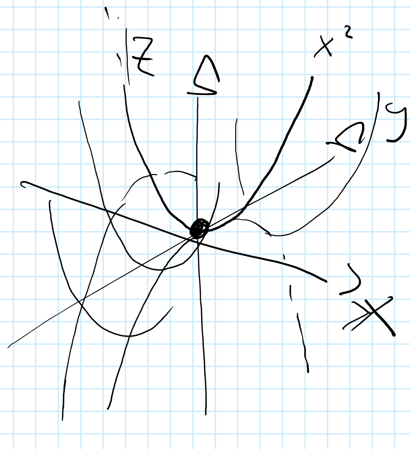
OSS Sia $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe C^2

Sia $x_0 \in \mathbb{R}^2$ un p.to critico.

Supponiamo che $\nabla f(x_0) = 0$

e $\det Hf(x_0) < 0$.

Allora diremo che x_0 è un p.to di sella di f.



Esempio $f(x,y) = x^2 - y^2$

$$\nabla f(x,y) = (\underset{f_x}{2x}, \underset{f_y}{-2y})$$

$$\nabla f(0,0) = (0,0)$$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\det Hf(x,y) = -4 < 0$$

ATTENZIONE I tre teoremi visti discutono punti critici interni al dominio della funzione.

Se la funzione è definita su un chiuso bisogna studiare a parte la funzione sulla frontiera del dominio chiuso.

ESTENSIONE I teoremi precedenti si estendono in modo naturale allo studio di punti di massimo.

ESERCIZI

ES 1 del 26/1/2017

Sia $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = e^{x+y} + \boxed{x^4 + y^4}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Provare che f ha un unico p.to critico e che si tratta di un p.to di min. assoluto. Collocare approx questo punto nel piano.

Svolgimento. $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ (di più $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$).

Poi avremo che $f(x,y) = f(y,x)$.

Gradiente

$$f_x = e^{x+y} + 4x^3$$

$$f_y = e^{x+y} + 4y^3$$

Punti critici sono le soluzioni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ delle 2 eq

$$\begin{cases} e^{x+y} + 4x^3 = 0 \\ e^{x+y} + 4y^3 = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$4x^3 - 4y^3 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{\underline{(x-y)}}\,\underline{\underline{(x^2+xy+y^2)}} = \boxed{x^3 - y^3 = 0}$$

$$\Updownarrow$$

$$x - y = 0 \quad \text{oppure} \quad \boxed{x^2 + xy + y^2 = 0}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\boxed{x = y} \qquad\qquad \boxed{x = y = 0}$$

Metto $x = y$ in una delle 2 eq. del sistema e trovo:

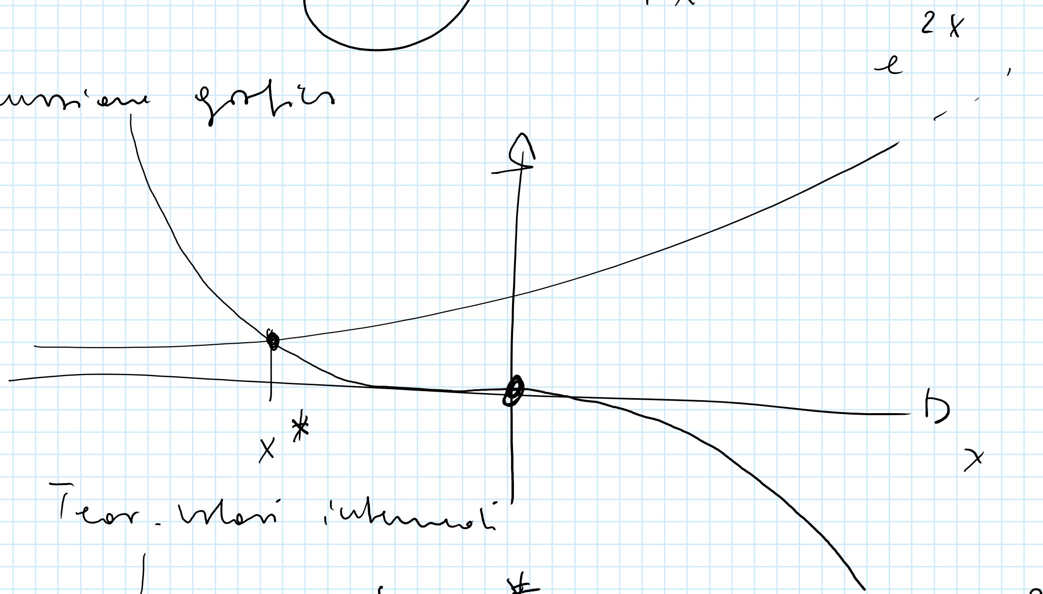
Pongo $x = y$ in una delle 2 eq. del sistema e trovo:

$$\boxed{e^{2x} + 4x^3 = 0}$$

$$\Updownarrow$$

$$e^{2x} = -4x^3$$

Discussione grafica



Teor. valori intermedi

Concludo che esiste $x^* < 0$ tale che

$$e^{2x^*} = -4(x^*)^3$$

$$(x^*)^3 = -\frac{1}{4} e^{2x^*}$$

$$\wedge$$
$$1$$

Dunque $(x^*)^3 \in \left(-\frac{1}{4}, 0\right)$

É l'unica soluzione perché:

$x \longmapsto e^{2x} + 4x^3$ è strett. crescente.

Conclusione: l'unico punto critico è

$(x^*, x^*) \in \mathbb{R}^2$ 3° quadrante

Studio la convessità della funzione:

$$f_x = e^{x+y} + 4x^3 \quad \leftarrow$$

$$f_y = e^{x+y} + 4y^3 \quad \Leftarrow$$

Matrice Hessiana

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} e^{x+y} + 12x^2 & e^{x+y} \\ e^{x+y} & e^{x+y} + 12y^2 \end{bmatrix}$$

Traccia

$$\operatorname{tr} Hf(x,y) = 2e^{x+y} + 12(x^2+y^2) > 0$$

$\forall x \ \forall y$

$$\det Hf(x,y) = (e^{x+y} + 12x^2)(e^{x+y} + 12y^2) - e^{2(x+y)}$$

$$= \cancel{e^{2(x+y)}} + e^{x+y}(12y^2 + 12x^2) + 144x^2y^2 - \cancel{e^{2(x+y)}}$$

$\geq 0 \quad \forall (x, y)$

$\operatorname{tr} Hf > 0$
$\det Hf \geq 0$ $\Big\}$ $\Rightarrow$ $Hf(x,y) \geq 0$
$\forall (x,y)$

$\Updownarrow$

f convessa.

Per il Teor. visto in classe

f conv.
(x^*, x^*) p.to critico $\Big\}$ $\Rightarrow$ (x^*, x^*) unico punto di min assoluto.

$\square$

ES 2 del 6/7/2016

Si consideri l'insieme

$$K = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \underline{(x+y)^2 \leq x-y} \leq 1 \} \subset \mathbb{R}^2.$$

i) Stabilire se K è chiuso.

ii) Stabilire se K è compatto

Soluzione. Abbiamo

$$K = K_1 \cap K_2$$

con $K_1 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x+y)^2 - (x-y) \leq 0 \}$

Con $K_1 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x+y)^2 - (x-y) \leq 0 \}$

$= f_1^{-1} (\underbrace{]-\infty, 0]}_{\text{chiuso in } \mathbb{R}})$ $\quad f_1(x,y) = (x+y)^2 - (x-y)$

$K_2 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y \leq 1 \}$

$= f_2^{-1} ( ]-\infty, 1])$

$f_2(x,y) = x - y$

$\left. \begin{array}{l} f_1 \text{ è cont.} \\ ]-\infty, 0] \text{ chiuso} \end{array} \right\} \Rightarrow K_1 \text{ chiuso}$

$\left. \begin{array}{l} f_2 \text{ è cont.} \\ ]-\infty, 1] \text{ chiuso} \end{array} \right\} \Rightarrow K_2 \text{ chiuso}$

$K = \underbrace{K_1}_{\text{chiuso}} \cap \underbrace{K_2}_{\text{chiuso}}$ è chiuso

ii) Heine Borel :

K compatto $\Leftrightarrow$ $\underbrace{K \text{ chiuso}}_{\text{sì}}$ e limitato

$(K \subset \mathbb{R}^2)$

Ora $(x,y) \in K$. Avremo

$$0 \leq \underbrace{(x+y)^2}_{} \leq \underbrace{x-y}_{} \leq 1 \qquad \underbrace{x-y \leq 1}_{}$$

$$\Downarrow$$

$(x+y)^2 \leq 1$ ovvero

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{-1 \leq x+y \leq 1}$$

Incrocio queste informazioni con

$$\boxed{0 \leq x-y \leq 1}$$

$$\Updownarrow$$

$$y \boxed{\leq} x \leq 1+y$$

Dunque

$-1 \leq x+y \leq 1+y+y = 1+2y \Rightarrow \boxed{y \geq -1}$

$1 \geq x+y \geq 2y \Rightarrow y \leq 1/2$

$\Rightarrow y \in [-1, 1/2]$.

Continuo usando $-1 \leq \boxed{y \leq x \leq 1+y} \leq 1+\frac{1}{2}$

$$\Downarrow$$

$$\Downarrow$$

$$-1 \leq x \leq \frac{3}{2}$$

Quindi

$$K \subset \left[-1, \frac{3}{2}\right] \times \left[-1, \frac{1}{2}\right]$$

$$\Downarrow$$

K è limitato.

Risp.: Sì K è compatto. $\square$

ES 4 del 6/7/2011

Siano $\beta \in \mathbb{R}$ e $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y > 0 \}$

ed $f : A \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = x + \beta y^2 - \log(x+y)$$

i) Al variare di $\beta \in \mathbb{R}$ calcolare i punti critici di f

ii) Calcolare la matrice Hessiana di f

iii) Determinare tutti $\beta \in \mathbb{R}$ tali che f sia convessa su A

iv) Stabilire se i p.ti critici sono p.ti di min/max locale/globale.