Lezione 3
mercoledì 1 marzo 2017 10:33

$(a_n > 0 \ \forall n)$

$$L = \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$ Allora

1) $L < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$

2) $L > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$

(Ma di più $a_n \not\to 0$)

1) Esiste $\boxed{L < q < 1}$

Esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq \bar{n}$ si ha:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$$

$$\Updownarrow$$

$$a_{n+1} < q \cdot a_n \quad \forall n \geq \bar{n}$$

Itero questa disug.

$$\boxed{a_{n+1} < q \cdot \boxed{a_n}} < q \cdot q \cdot a_{n-1} < q \cdot q \cdot q \cdot a_{n-2}$$

$$< q^{n-\bar{n}+1} a_{\bar{n}}$$

Ricordo:

Ricopio:

$$a_{n+1} < q^{n} \cdot \boxed{q^{-\bar{n}+1} \cdot a_{\bar{n}}}$$

Dunque

$$\sum_{n=\bar{n}}^{\infty} a_{n+1} < \left(\sum_{n=\bar{n}}^{\infty} q^{n}\right) \cdot q^{-\bar{n}+1} a_{\bar{n}}$$

$$\wedge$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^{n} < \infty$$

perché

Per confronto $(L<)\, q < 1$

converge anche

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty.$$

COMMENTO

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{converge}$$

$$\Updownarrow$$

$$\sum_{n=\bar{n}}^{\infty} a_n \quad \text{converge}$$

(2) a_{n+1}

(2)

$$L = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

$1 < q < L$ esiste

Avremo che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > q \quad \forall n \geq \bar{n} \quad \exists$$

$$a_{n+1} > q\, a_n$$

itero

$$a_{n+1} > \underbrace{q^{n}}_{\substack{\downarrow\, n\to\infty \\ +\infty}} \cdot q^{-\bar{n}+1} \cdot a_{\bar{n}}$$

$q > 1$

No CN $\Rightarrow$ Serie non converge.

$(a_n \not\to 0)$

ES 5 Dimostrare la conv. della serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Soluzione. Serie a termini positivi.

Posso usare il criterio del Rapporto.

Posso usare il criterio del rapporto.

$$a_n = \frac{1}{n!}$$

Formo il rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot n!$$

$$= \frac{\cancel{n!}}{(n+1)\cdot \cancel{n!}} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0 = L$$

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$$

Siccome

$$L = 0 < 1 \overset{CR}{\Longrightarrow} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} < \infty. \qquad \square$$

<u>ES. 6</u> Studiare la conv. della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

Soluzione. Serie a termini positivi

Provo col crit. Rapporto.

Provo col crit. Rapporto.

$$a_n = \frac{n!}{n^n}$$

Formo il quoziente:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!}$$

$$= \frac{(n+1)}{(n+1)^{n+1}} \cdot n^n$$

$$= \frac{1}{(n+1)^n} \cdot n^n$$

$$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

Forma indet. $[1^\infty]$

Usare il limite notevole

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e \in (2,3)$$

$$= \left(\frac{1}{n+1}\right)^n$$

$=$

$$= \left(\frac{n+1}{n} \right)$$

$$= \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

$$\xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{1}{e} = L$$

Ma

$$e > 1 \Rightarrow L = \frac{1}{e} < 1$$

Quindi:

$$(\text{Rapp.}$$

$$L = \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$$

$\square$

<u>ES 7</u> Determinare tutti i $x \in \mathbb{R}$ tali che converga la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(2+n)}{n} \cdot |x|^{n}.$$

Soluzione. Serie a termini positivi

Posso usare Crit. Rad. / Rapp.

Provo con il Crit. Radice

$$\boxed{L(x)} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\log(2+n)}{n} \cdot |x|^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \boxed{|x|} \frac{\sqrt[n]{\log(2+n)}}{\sqrt[n]{n}}.$$

Sappiamo che

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Poi studio

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\log(2+n)} =$$

$$\log(1+x) \leq x$$

$$\log 3 \leq \log(2+n) \leq 1+n \leq n+n$$

$$\forall n \geq 1 \qquad\qquad\qquad\qquad \| $$

$$2n$$

$$\sqrt[n]{\log 3} \leq \sqrt[n]{\log(2+n)} \leq \sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{n}$$

$$\sqrt[n]{\log 3} \le \sqrt[n]{\log(2+n)} \le \sqrt[n]{2}\,\sqrt[n]{n}$$

$$\sqrt[n]{\log 3} \to 1, \qquad \sqrt[n]{2} \to 1, \qquad \sqrt[n]{n} \to 1$$

Per confronto deduco che

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\log(2+n)} = 1 .$$

Conclusione:

$$L(x) = |x| .$$

Dunque per il crit. Radice:

(1) $|x| < 1 \Rightarrow$ Serie converge

(2) $|x| > 1 \Rightarrow$ " diverge.

Rimane scoperto il caso $|x| = 1$.
In questo caso la serie è

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(2+n)}{n}$$

La CN è verificata

$$\frac{\log(2+n)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Osservo ora che

$$\log(2+n) \geq \log 3 \quad \forall n \geq 1$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\log(2+n)}{n} \geq \frac{\log 3}{n} \quad \forall n \geq 1$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(2+n)}{n} \geq \log 3 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$\| \quad$ noto

$+\infty$

Per confronto la serie data diverge a $+\infty$. $\square$

Conclusione

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(2+n)}{n} |x|^n < \infty$$

$$\Updownarrow$$

$$|x| < 1$$

CRITERIO DELLA CONV. ASSOLUTA

<u>DEF</u> Diciamo che la serie reale o complessa

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Converge assolutamente se converge la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty .$$

TEOR (Crit. della Conv. Assoluta)

Se la serie reale o complessa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge assolutamente allora converge anche semplicemente e inoltre

$$\underbrace{\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right|} \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \quad \left(\begin{matrix}\text{Ipotesi} \\ < \infty\end{matrix}\right) .$$

DIM. Caso $a_n \in \mathbb{R}$. Definisco

$$a_n^+ := \max\{a_n, 0\} \geq 0$$

$$a_n^- := \min\{a_n, 0\} \leq 0$$

Proprietà:

i) $a_n^+ \geq 0$ e $a_n^- \leq 0$

ii) $a_n = a_n^+ + a_n^-$ $\longleftarrow$

ii) $a_n = a_n^+ + a_n^-$ $\longleftarrow$

iii) $|a_n| = a_n^+ - a_n^-$

iv) $a_n^+ \leq |a_n|$, $-a_n^- \leq |a_n|$.

Ora per confronto

$$0 \leq \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+}_{\text{converge per il Crit. confronto}} \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$$

ipotesi

$$0 \leq \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} -a_n^-}_{\text{converge}} \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} a_n^-$$

Concludo così

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} (a_k^+ + a_k^-)$$

$k=0$ $k=0$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k^+ + \sum_{k=0}^{n} a_k^-$$

Quindi esiste finito

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k .$$

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

So che

$$\left| \sum_{k=0}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k|$$

Con $n \to \infty$ trovo l'altra tesi.

$\square$

CRITERIO DI LEIBNIZ

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale non negativa: $a_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Diremo che una serie del tipo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$$

è una serie a segno alterno.

(Leibniz)

TEOR. Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione reale tale che:

① $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$ (succ. infinitesima)

② $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (succ. monotona decrescente).

Allora la ~~serie~~ serie a segno alterno $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$

converge.

ATTENZIONE La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

Converge per il crit. di Leibniz.

$$a_n = \frac{1}{n} \quad \text{è}$$

① infinitesima ok

② decrescente ok.

Tuttavia la serie <u>non</u> conv. assoluta-mente:

mentre:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty .$$

Quindi

$$\text{Conv. Semplice} \;\not\Longrightarrow\; \text{Conv. Assoluta}$$

$$\text{Conv. Semplice} \;\xLeftarrow{\text{ok}}\; \text{Conv. Assoluta}$$

DIM. Voglio provare che convergono le somme parziali:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k$$

quando $n \to \infty$.

Guarderemo le somme parz. pari e dispari

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k a_k$$

$$S_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^k a_k$$

Faremo vedere che

S_{2n} è monotona e limitata

S_{2n+1} " " "

Avremo l'esistenza dei limiti

$$L_1 = \lim_{n \to \infty} S_{2n}$$

$$L_2 = \lim_{n \to \infty} S_{2n+1}$$

Proveremo che

$$L_1 = L_2$$