Lezione 30

lunedì 22 maggio 2017 10:31

1- Forme Differenziali in $\mathbb{R}^n$

- Forma Differenziale. Campo vettoriale
- Forme esatte e chiuse. Campi vett. conservativi
- Integrali di 1-forme
- Teoremi sulle forme diff.
- Esercizi.

Richiami di Algebra Lineare

$\mathbb{R}^n$ è uno Sp. Vettoriale

$e_1, \dots, e_n$ sia la base canonica standard

Sia $$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}) = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) = \{\text{trasformazioni lineari da } \mathbb{R}^n \text{ a } \mathbb{R}\}$$

Questo è lo spazio duale di $\mathbb{R}^n$

È uno spazio vettoriale.

Indichiamo con $dx_1, \dots, dx_n$ la base di $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ duale della base $e_1 \dots e_n$

ovvero

$$dx_i(e_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Per linearità dx_i è definita su tutto $\mathbb{R}^n$:

$$dx_i(v) = dx_i\left(\sum^n v_i e_i\right)$$

$$dx_i(v) = dx_i\left(\sum_{j=1}^n v_j e_j\right)$$

$v_i \in \mathbb{R}$

$$= \sum_{j=1}^n v_j \underbrace{dx_i(e_j)}_{\substack{\shortparallel \\ 1 \text{ se } i=j}}$$

$$= v_i$$

Poi ogni $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ si scrive come

$$T = \sum_{i=1}^n a_i \, dx_i$$

con $a_i \in \mathbb{R}$. È allora facile calcolare

$$\boxed{T(v)} = \sum_{i=1}^n a_i \, dx_i(v)$$

$$= \sum_{i=1}^n a_i v_i = \langle a, v \rangle$$

$a = (a_1, \dots, a_n)$

<u>DEF</u> Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto. Una 1-forma differenziale su A è una funzione

$$\omega : A \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$$

della forma

n

$$\omega(x) = \sum_{i=1} \omega_i(x)\, dx_i \qquad x \in A$$

dove $\omega_i : A \to \mathbb{R}$.

Se $\omega_i \in C(A)$ diremo che ω ha coeff. cont. e scriveremo $\omega \in \Omega(A)$

Se $\omega_i \in C^1(A)$ diremo che ω è di classe $C^1(A)$ e scriveremo $\omega \in \Omega^1(A)$.

ESEMPIO Sia $f \in C^1(A)$. Allora $\forall x \in A$ si avrà $df(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ e quindi

$$df(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, dx_i .$$

DEF (Forma esatta) Una 1-forma diff. $\omega \in \Omega(A)$, $A \subset \mathbb{R}^n$, si dice esatta in A (aperto) se esiste $f \in C^1(A)$ tale che

$$df = \omega .$$

La funzione f si dirà potenziale di ω.

DEF (Forma chiusa) Una 1-forma diff. $\omega \in \Omega^1(A)$ si dice chiusa se $\left(\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(x)\, dx_i\right)$

$$\frac{\partial \omega_i(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial \omega_j(x)}{\partial x_i} \qquad \forall x \in A \quad \forall i,j = 1 \dots n$$

COMMENTO 1 Se $\omega \in \Omega^1(A)$ è esatta (ovvero esiste $f \in C^2(A)$ tale che $df = \omega$) allora è per forza chiusa:

Teorema di Schwarz

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \omega_i(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} \omega_j(x)$$

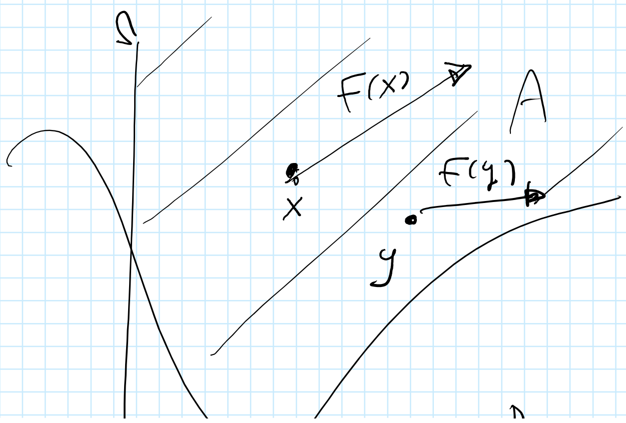
$$\sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = df(x) = \omega = \sum \omega_i(x)\, dx_i$$

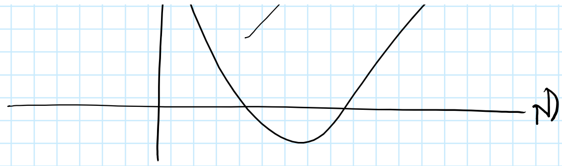
Riassumendo:

$$\omega \text{ esatta in } A \Rightarrow \omega \text{ chiusa in } A$$

per $\omega \in \Omega^1(A)$.

COMMENTO 2 Un campo vettoriale in $A \subset \mathbb{R}^n$ è una funzione $F : A \to \mathbb{R}^n$





ORA dato $\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \, dx_i$, $\omega_i : A \to \mathbb{R}$

posso associare il campo vettoriale

$$F(x) = (\omega_1(x), \dots, \omega_n(x)) \in \mathbb{R}^n$$

Viceversa, dato F come sopra posso definire una 1-forma diff in A.

$$\begin{array}{ccc} \text{Campi vettor.} & \xleftrightarrow[\mu]{1-1} & \text{1-forme diff.} \\ F & & \omega \end{array}$$

Se ω è esatta questo significa che $\exists f$

$$\sum \boxed{\frac{\partial f}{\partial x_i}} dx_i = df(x) = \omega(x) = \sum \boxed{\omega_i} \, dx_i$$

Questo significa che

$$\nabla f(x) = F(x)$$

Diremo equivalentemente che F è un campo conservativo se ammette un potenziale ovvero se esiste f tale che $\nabla f = F$.

COMMENTO 3 Sia $F : \mathbb{R}^3 \supset A \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale in $\mathbb{R}^3$

$$F = (F_1, F_2, f_3).$$

Il rotore di F si definisce in questo modo

$$\operatorname{rot}(F) = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix}$$

$$\nabla \times F$$

$$= e_1 \left(\frac{\partial}{\partial y} F_3 - \frac{\partial}{\partial z} F_2 \right) +$$

$$+ (-1)\, e_2 \left(\frac{\partial}{\partial x} F_3 - \frac{\partial}{\partial z} F_1 \right)$$

$$+ e_3 \left(\frac{\partial}{\partial x} F_2 - \frac{\partial}{\partial y} F_1 \right)$$

Ottengo la formula

$$\operatorname{rot} F := \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

Dunque con la corrispondenza

$$F \longleftrightarrow \omega$$

Concludo che

$\operatorname{rot} F = 0$ in A $\iff$ ω è chiusa in A

F campo irrotazionale. $\square$

Integrazione di 1-forme

DEF L'integrale di una forma differenziale $\omega \in \Omega(A)$, $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, lungo una curva $\gamma \in C^1([0,L]; A)$ (curva regolare) si definisce nel seguente modo:

$$\int_\gamma \omega := \int_\gamma \underbrace{\omega(T)}_{\text{funzione lungo la curva}} \, ds$$

dove T è il campo tangente unitario della curva.

OSS Esplicito la definizione. Abbiamo

$$T = \frac{\dot\gamma}{|\dot\gamma|} \qquad (\text{def.})$$

e dunque

$$\underbrace{\omega(T)}_{\text{nel punto } \gamma(t)} = \omega\left(\frac{\dot\gamma}{|\dot\gamma|}\right) =$$

$$= \frac{1}{|\dot\gamma|}\,\omega(\dot\gamma) \qquad \omega = \sum \omega_i(x)\,dx_i$$

$$\omega(\dot\gamma) = \sum \omega_i\,\dot\gamma_i$$

$$\boxed{= \frac{1}{|\dot\gamma(t)|}\sum_{i=1}^{n} \omega_i(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma_i(t)}$$

Dunque

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \omega(T)\,ds \qquad \gamma \in C^1([0,L];A)$$

$$= \int_0^L \frac{1}{|\dot\gamma(t)|}\sum_{i=1}^{n} \omega_i(\gamma(t))\,\dot\gamma_i(t)\,|\dot\gamma(t)|\,dt$$

$$\boxed{= \int_0^L \sum_{i=1}^{n} \omega_i(\gamma(t))\,\dot\gamma_i(t)\,dt}$$

$\longrightarrow$ posso prendere questo come definizione

Preparazione: Data $\gamma : [0,L] \to \mathbb{R}^n$

posso definire la curva inversa

$$(-\gamma) : [0,L] \to \mathbb{R}^n$$

in questo modo

$$(-\gamma)(t) = \gamma(L-t)$$

• Date due curve $\gamma: [0,L] \to \mathbb{R}^n$

$\eta: [0,M] \to \mathbb{R}^n$

con $\gamma(L) = \eta(0)$

posso definire la loro concatenazione

$$(\gamma + \eta): [0, L+M] \to \mathbb{R}^m$$

in questo modo

$$(\gamma + \eta)(t) = \begin{cases} \gamma(t) & 0 \leq t \leq L \\ \eta(t-L) & L \leq t \leq M+L \end{cases}$$

LEMMA Siano γ e η due curve concatenabili di classe C^1, e sia $\omega \in \Omega(\mathbb{R}^n)$

Allora:

1) $$\int_{-\gamma} \omega = - \int_{\gamma} \omega \quad ;$$

2) $$\int_{\gamma+\eta} \omega = \int_{\gamma} \omega + \int_{\eta} \omega \, .$$

TEOREMA Sia $\omega \in \Omega(A)$. Sono equivalenti queste 3 affermazioni:

A) ω è esatta nell'aperto A.

B) $\forall \gamma \in C^1([0,L]; A)$ l'integrale

$$\int_\gamma \omega$$

dipende solo dai punti iniziale $\gamma(0)$ e finale $\gamma(L)$ della curva, e non dalla traiettoria percorsa. Di più, l'integrale è esattamente

$$= f(\gamma(L)) - f(\gamma(0))$$

dove f è un potenziale di ω.

c) $\forall \gamma \in C^1([0,L]; A)$ chiusa $(\gamma(0) = \gamma(L))$

si ha

$$\int_\gamma \omega = 0 .$$

Dim A) $\Rightarrow$ B). Sia $f \in C^1(A)$ un potenziale di ω

$$df(x) = \omega(x) \qquad \forall x \in A$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \omega_i(x) \qquad \forall i = 1, \dots, n$$

ORA

$$\int_\gamma \omega = \int_0^L \sum_{i=1}^n \omega_i(\gamma(t))\, \dot\gamma_i(t)\, dt$$

$$= \int_0^L \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t))\, \dot\gamma_i(t)\, dt$$

$$= \int_0^L \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt$$

$$= \int_0^L \frac{d}{dt} \Big(f(\gamma(t)) \Big) \, dt$$

$$= f(\gamma(L)) - f(\gamma(0)).$$

B) $\Rightarrow$ C) Banale.

C) $\Rightarrow$ B) Siano γ e $\varkappa$ due curve tali che

$$\gamma(0) = \varkappa(0)$$
$$\gamma(L) = \varkappa(M)$$

stessi p.ti iniz. e finali

Ma $\gamma - \varkappa := \gamma + (-\varkappa)$ È chiusa

$$0 \overset{\text{Ipotesi}}{=} \int_{\gamma-\varkappa} \omega = \int_\gamma \omega + \int_{-\varkappa} \omega$$

$$= \int_\gamma \omega - \int_\varkappa \omega$$

$$\Downarrow$$

$$\int_\gamma \omega = \int_\varkappa \omega$$

B) $\Rightarrow$ A) Ipotesi: integrale non dipende dal percorso. Devo costruire un potenziale.

Fisso un $x_0 \in A$ e posso supporre che ogni altro punto $x \in A$ si colleghi con x_0 tramite una curva C^1 tutta contenuta in A.

Se $\gamma_x \in C^1([0,L]; A)$ è tale che $\gamma_x(0) = x_0$

$\gamma_x(L) = x$

definisco

$$f(x) = \int_{\gamma_x} \omega \quad , \quad x \in A$$

ho definito $f : A \to \mathbb{R}$. La definizione è ben posta: non dipende per l'ipotesi B) dalla particolare γ_x scelta.

Fisso $x \in A$ e provo a calcolare

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t e_i) - f(x)}{t}$$