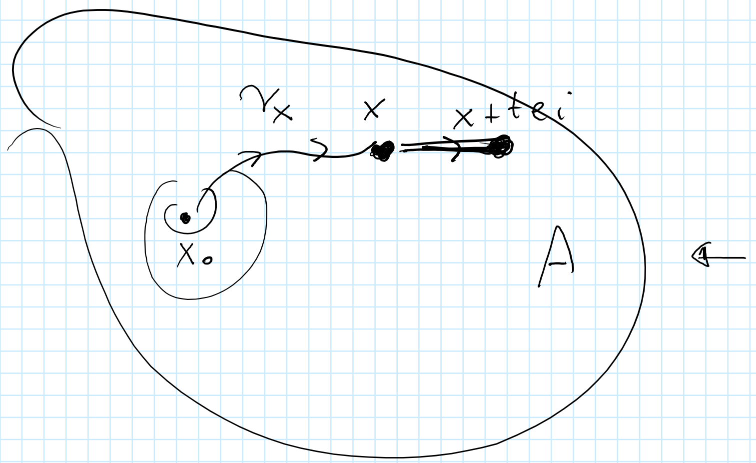
Termine teorema:

$$f(x) = \int_{\gamma_x} \omega \qquad\qquad B) \Rightarrow A)$$



Voglio provare che

$$df(x) = \omega(x) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(x)\, dx_i$$

questo equivale a dire che

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \omega_i(x) \qquad \forall x \in A \quad \forall i = 1 \dots n$$

Conti:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+te_i) - f(x)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(\int_{\gamma_x + [x, x+te_i]} \omega - \int_{\gamma_x} \omega \right)$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \int_{[x, x+te_i]} \omega$$

$$s \longmapsto \underbrace{x + s e_i}_{= c(s)} \qquad 0 \leq s \leq t$$

e quindi $\dot{c}(s) = e_i$ e quindi

$$\int_{[x, x+te_i]} \omega = \int_0^t \sum_{i=1}^n \omega_i (x + s e_i) \, \underline{\dot{c}_i(s)} \, ds$$

$$= \int_0^t \omega_i (x + s e_i) \, ds$$

Dunque

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \int_0^t \omega_i (x + s e_i) \, ds$$

$s \mapsto$ è continua!

Esiste

$$= \omega_i(x)$$

$x \mapsto$ è cont.

e dunque $f \in C^1(A)$.

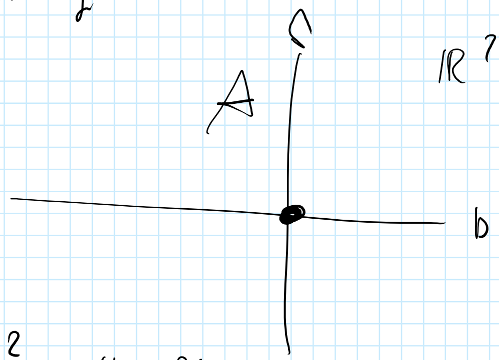
$\square$

$$A$$
$$\parallel$$

<u>ESEMPIO</u> Nel primo $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ considero

$$\omega(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}\,dx - \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

Coeff. C^∞ nel dominio



Verifico che ω è chiusa:

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{x^2+y^2 - y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \boxed{\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right) = -\frac{x^2+y^2 - x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= -\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}$$

$$= \boxed{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$$

Dunque ω è chiusa.

Provo che ω <u>NON</u> <u>è</u> esatta in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Provo che ω <u>NON</u> è esatta in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Considero la curva chiusa

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$

$$t \in [0, 2\pi)$$

$$\dot{\gamma}(t) = (-\sin t, \cos t)$$

Dunque

$$\int_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} \sum_{i=1}^{2} \omega_i(\gamma(t))\, \dot{\gamma}_i(t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \cdot (-\sin t) + \frac{\quad}{\cos^2 t + \sin^2 t} \cos t \right\} dt$$

$$= - \int_0^{2\pi} 1 \, dt = -2\pi \neq 0. \qquad \square$$

Vogliamo capire in quali situazioni le forme chiuse sono esatte.

DEF (Insieme semplicemente connesso $\equiv$ contraibile)
Diciamo che $A \subset \mathbb{R}^n$ è semplicemente connesso se esistono $x_0 \in A$ ed una funzione ... ∞

convesso se esistono $x_0 \in A$ ed una funzione $\boxed{\text{continua}}$

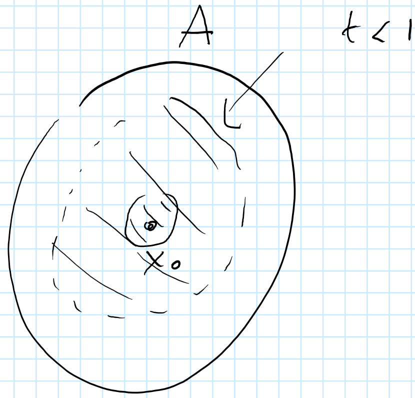
$$h : [0,1] \times A \longrightarrow A$$

"omotopia ad un punto"

tale che $h(1,x) = x \quad \forall x \in A$

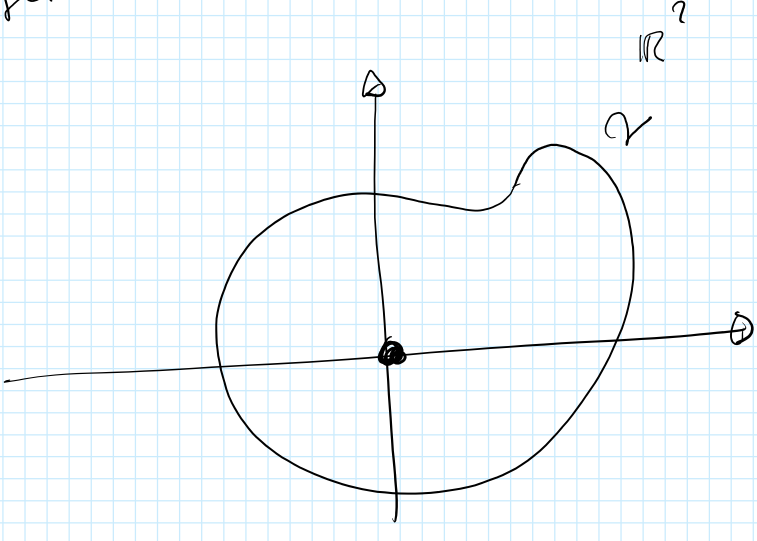
$$h(0,x) = x_0 \quad \forall x \in A.$$

Disegno



Sto contraendo A ad un punto in modo continuo.

<u>ESEMPIO</u> : $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ NON è semplicemente convesso :

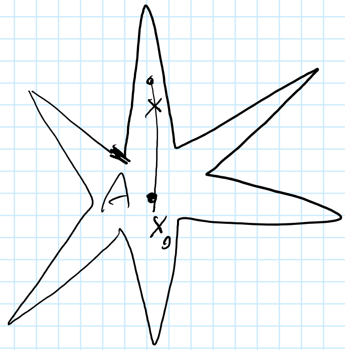


<u>OSSERVAZIONE</u> : Se $A \subset \mathbb{R}^n$ è convesso è contraibile.

• Se A è stellato rispetto ad un punto $x_0 \in A$ ovvero:

$$x \in A \implies [x, x_0] \subset A$$

allora A è contraibile.



Ad es. se $x_0 = 0$ la omotopia è data da

$$h(t, x) = t x .$$

TEOREMA (di Poincaré)

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto semplicemente connesso e sia $\omega \in \Omega^1(A)$ (1-forma con coeff. C^1). Allora sono equivalenti

(1) ω è esatta in A

(2) ω è chiusa in A.

ES 2 del 14/6/2016

Data $\phi \in C^1(\mathbb{R})$ una funzione tale che $\phi(0) = 0$. Si consideri la 1-forma diff. in $\mathbb{R}^2$

$$\omega = (1 + y \cos(xy))\, dx + (\phi(x) + x \cos(xy))\, dy$$

i) Det. ϕ in modo tale che ω sia esatta in $\mathbb{R}^2$

ii) Per tale ϕ calcolare un potenziale di ω

iii) Calcolare l'integrale $\int_\gamma \omega$ lungo la curva γ di eq. polare $\rho = \sin(\theta)$

$\theta \in [0, \pi/2)$.

Risoluzione

$A = \mathbb{R}^2$ è semplic. connesso

Dunque:

ω esatta in $\mathbb{R}^2$ $\iff$ ω è chiusa in $\mathbb{R}^2$

Impongo la cond. di chiusura:

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(1 + y\cos(xy)\Big)\,dx = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\phi(x) + x\cos(xy)\Big) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\cancel{\cos(xy)} + \cancel{y(-\sin(xy))x} = \phi'(x) + \cancel{\cos(xy)} + \cancel{x(-\sin(xy))y}$$

impongo

$\Updownarrow$

$\phi'(x) = 0$ su $\mathbb{R}$

$\Updownarrow$

$\phi(x) = \text{cost.}$

$$\phi(x) = 0 \quad \Leftarrow \quad \phi(0) = 0$$

Dunque abbiamo

$$\omega = (1 + y\cos(xy))\, dx + x\cos(xy)\, dy$$

Sappiamo a priori che ω possiede un potenziale.

Cerco $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ tale che

$$\nabla f(x,y) = (1 + y\cos xy \;,\; x\cos xy)$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \boxed{f_x} = 1 + y\cos xy \\ f_y = x\cos(xy) \end{cases} \quad \leftarrow \quad (*)$$

Integro la seconda equazione con integrali indefiniti

$$f(x,y) = \int f_y\, dy = \int x\cos(xy)\, dy =$$

$$= \underline{\underline{\sin(xy)}} + C(x)$$

non dipende

dy .

Derivo ora in x e metto nello 1^ eq.

$$f_x = y\cos(xy) + C'(x)$$

Cost. :

$$\underbrace{\cancel{y\cos(xy)}} + C'(x) = 1 + \underbrace{\cancel{y\cos(xy)}}$$

Rimane una eq. della sola x :

$$C'(x) = 1$$

Trovo

$$C(x) = x + \underset{\underset{\mathbb{R}}{\Uparrow}}{\text{Costante}}$$

Scelgo Costante $= 0$

Un potenziale è

$$\boxed{f(x,y) = \sin(xy) + x} \quad \text{su } \mathbb{R}^2 .$$

iii) Per calcolare

$$\int_\gamma \omega \overset{\text{Teor. sulle forme esatte}}{=} f(\gamma(\pi/2)) - f(\gamma(0))$$

$$\gamma : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}^2$$

dove γ è $\rho = \sin(\theta)$

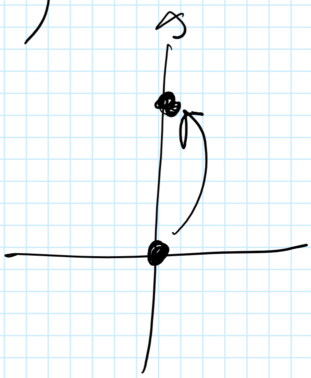
$$\gamma(\theta) = (\rho \cos\theta, \rho \sin\theta)$$

$$= (\sin\theta \cos\theta, \sin^2\theta)$$

$$\theta \in [0, \pi/2]$$

$$\gamma(0) = (0,0)$$

$$\gamma(\pi/2) = (\underset{\uparrow}{0}, 1)$$



Dunque $f = \sin(xy) + x$

$$\int_\gamma \omega = 0 - 0 = 0$$

$\square$

ES 1 30/8/2016

Dato un parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri la 1-forma diff. in $\mathbb{R}^2$

$$\omega(x,y) = \frac{2x + \alpha e^y}{x^2 + e^y}\, dx + \frac{\alpha x + e^y}{x^2 + e^y}\, dy$$

i) Det. tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui ω sia esatta su $\mathbb{R}^2$. Poi per tali α:

ii) Calcolare un potenziale f di ω su $\mathbb{R}^2$

iii) Data la curva $\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = \left(\sin t,\ 1 - \cos(t/2) \right) \qquad t \in [0,\pi]$$

Calcolare l'integrale

$$I = \int_\gamma \omega$$

Risoluz: 1

$\mathbb{R}^2$ conv. $\Longrightarrow$ sempl. connesso

Dunque ω esatta su $\mathbb{R}^2$ $\Longleftrightarrow$ ω è chiusa

Impongo le condizioni di chiusura:

$$\frac{\partial}{\partial y}$$