Lezione 32

mercoledì 24 maggio 2017 10:29

ES 1. 30/8/2016

$$\omega(x,y) = \frac{2x + \alpha e^y}{x^2 + e^y}\, dx + \frac{\alpha x + e^y}{x^2 + e^y}\, dy$$

in $\mathbb{R}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$ parametro

(i) Det. tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ t.c. ω sia esatta in $\mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^2$ sempl. connesso

ω esatta $\iff$ ω chiusa.

Impongo cond. di chiusura:

$$S = \frac{\partial}{\partial y} \frac{2x + \alpha e^y}{x^2 + e^y} \overset{\text{Voglio}}{\underset{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2}{=}} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\alpha x + e^y}{x^2 + e^y} = D$$

$$S = \frac{\alpha \boxed{e^y}(x^2 + e^y) - (2x + \alpha e^y)\boxed{e^y}}{(x^2 + e^y)^2}$$

$$= e^y \frac{\alpha x^2 + \cancel{\alpha e^y} - 2x - \cancel{\alpha e^y}}{(x^2 + e^y)^2}$$

$$= e^y \frac{\alpha x^2 - 2x}{(x^2 + e^y)^2}$$

$$D = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\alpha x + e^y}{\dots} \right)$$

$$D = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\alpha x + e^y}{x^2 + e^y} \right)$$

$$= \frac{\alpha (x^2 + e^y) - (\alpha x + e^y) \cdot 2x}{(x^2+e^y)^2}$$

$$= \frac{\alpha e^y - \alpha x^2 - 2x e^y}{(x^2+e^y)^2}$$

$$= \frac{e^y(\alpha - 2x) - \alpha x^2}{(x^2+e^y)^2}$$

$$S = D \iff e^y(\alpha - 2x) - \alpha x^2 = e^y(\alpha x^2 - 2x)$$

$$e^y(\alpha \cancel{- 2x} \cancel{+ 2x} - \alpha x^2) = \alpha x^2$$

$$\iff \underbrace{e^y \alpha (1 - x^2)}_{} = \alpha x^2 \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^2$$

$$\iff \alpha = 0$$

(ii)

$$\omega(x,y) = \frac{2x}{x^2+e^y}\,dx + \frac{e^y}{x^2+e^y}\,dy$$

Devo calcolare $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ tale

$$df = \omega \quad \text{su } \mathbb{R}^2$$

$$\Updownarrow$$

$$\nabla f(x,y) = F := \left(\frac{2x}{x^2+e^y} , \frac{e^y}{x^2+e^y} \right)$$

ovvero deve essere

$$\begin{cases} f_x = \dfrac{2x}{x^2+e^y} \\ f_y = \dfrac{e^y}{x^2+e^y} \end{cases} \quad \text{su } \mathbb{R}^2 \longleftarrow$$

Integro la 1^ eq. con integr. indefiniti:

$$f(x,y) = \int f_x(x,y)\, dx = \int \frac{2x}{x^2+e^y}\, dx$$

$$= \boxed{\log(x^2+e^y)} + c(y)$$

funzione della y

Derivo in y e sost. nella 2^ eq:

$$f_y(x,y) = \frac{e^y}{x^2+e^y} + c'(y)$$

Sost:

$$\cancel{\frac{e^y}{x^2+e^y}} + c'(y) = \cancel{\frac{e^y}{x^2+e^y}}$$

$$\Updownarrow$$

//

$$\Updownarrow$$

$$c'(y) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$c = c_0 \in \mathbb{R}$$

Prendo $c_0 = 0$.

Dunque un potenziale è

$$f(x,y) = \log(x^2 + e^y) \in C^\infty(\mathbb{R}^2).$$

(iii) $\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$

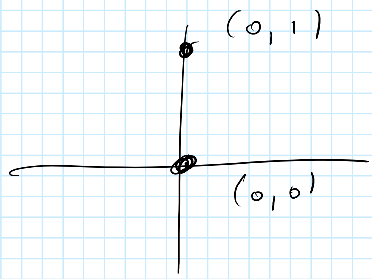
$$\gamma(t) = \left(\sin t,\ 1 - \cos(t/2)\right)$$

Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \omega$ $\leftarrow \alpha = 0$ $= f(\gamma(\pi)) - f(\gamma(0))$

$\uparrow$ Teorema sulle forme esatte

$$\gamma(0) = (0,0)$$

$$\gamma(\pi) = (0,1)$$



$$f(0,0) = \log(1) = 0 \leftarrow$$

$$\longrightarrow f(0,1) = \log(e) = 1$$

Quindi

$$\int_\gamma \omega = 1 - 0 = 1$$

∎

Spazi metrici completi e Teorema delle Contrazioni

Sia (X, d) uno spazio metrico.

DEF Diciamo che una successione di punti $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di X è di Cauchy se:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \ \forall m, n \geq \bar{n} \text{ si ha che}$$

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

DEF Diciamo che uno SM (X, d) è uno spazio metrico **completo** se ogni successione di Cauchy in X converge ad un elemento di X.

ESEMPI:

1. $\mathbb{R}$ con la dist. Euclidea è completo
2. $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, con la dist. Euclidea è completo
3. Prendiamo $[0,1] \subset \mathbb{R}$ e consideriamo

$$C([0,1]) = \{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ continue} \}$$

$$X = \{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ continue} \}$$

$$= C([0,1])$$

Con la distanza

$$d(f,g) = \|f-g\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$$

$f, g \in X$

$$= \max_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$$

è uno spazio metrico ed è COMPLETO

(4) Se (X, d) è uno SM completo e $K \subset X$ chiuso, allora

(K, d) è ancora uno spazio metrico completo •

Prendiamo ora una trasformazione

$$T : X \to X$$

Vogliamo capire se esiste una soluzione $x \in X$ dell'equazione

T

$$T(X) = X$$

Un tale $x \in X$ si chiama p.to fisso di T

DEF $T : X \to X$ si dice contrazione se esiste $0 \leq \lambda < 1$ tale che

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda \, d(x,y) .$$

TEOR (del p.to fisso di Banach)

Sia (X,d) uno SM completo e sia $T : X \to X$ una contrazione. Allora esiste un unico $x \in X$ tale che

$$Tx = x .$$

Dim. Fisso $x_0 \in X$ a mio piacere.
Definisco la succ. di elementi di X:

$$x_n = \underbrace{T \; \dots \; T}_{n \text{ volte itero } T} (T x_0) \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$= \underbrace{\left(T \circ \quad \circ T \right)}_{n\text{-volte}} (x_0) .$$

T^n

Verifico che $x_n \in X$ è di Cauchy

Devo provare che

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq \bar{n}$
$\forall k \in \mathbb{N}$

si ha $\quad d(x_{n+k}, x_n) < \varepsilon$

Sia $\varepsilon > 0$ fissato.

Dis. Triang

$$d(x_{n+k}, x_n) \leq \sum_{h=1}^{k} d(x_{n+h}, x_{n+h-1}) =$$

$$= \sum_{h=1}^{k} d(T^{n+h} x_0, T^{n+h-1} x_0) \leq$$

$$\leq \sum_{h=1}^{k} \lambda \, d(T^{n+h-1} x_0, T^{n+h-2} x_0) \leq$$

$$\leq \sum_{h=1}^{k} \lambda^{n+h-1} d(Tx_0, x_0) =$$

$$= \lambda^n d(Tx_0, x_0) \sum_{h=1}^{k} \lambda^{h-1}$$

$$\leq \lambda^n d(Tx_0, x_0) \sum_{h=1}^{\infty} \lambda^{h-1} = \circledast$$

$\lambda < 1$

$\wedge$
∞

Esempio 00

È meno di 0 ...

$$\lambda^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad 0 \leq \lambda < 1$$

Quindi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy

Quindi esiste $x \in X$ tale che

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{(X,d)} x .$$

Verifico che x è un p.to fisso:

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \underbrace{T\circ \dots \circ T}_{n \text{ volte}}(x_0)$$

$$= \lim_{n\to\infty} T\Big(\underbrace{T\circ \dots \circ T}_{n-1 \text{ volte}}(x_0)\Big)$$

T cont.

$$= T\Big(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}\Big)$$

$$= Tx .$$

$\rightarrow$ è un p.to fisso.

Dimostro che è unico:

Sia pure $\bar{x} \in X$ un p.to fisso:

$$d(x,\bar{x}) = d(Tx, T\bar{x})$$

$$\leq \lambda\, d(x,\bar{x}) \qquad 0 < \lambda < 1$$

$$\Downarrow$$

$$d(x,\bar{x}) = 0 \implies x = \bar{x}.$$

$\square$

ES in $\mathbb{R}^3$ Det. tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che la 1-forma

$$\omega = (\alpha y + z)\,dx + (\alpha x + z)\,dy + (\alpha x + y)\,dz$$

sia chiusa su $\mathbb{R}^3$. Per tali α calcolare un potenziale di ω.

Conti

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y}(\alpha y + z) = \dfrac{\partial}{\partial x}(\alpha x + z) \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial z}(\alpha y + z) = \dfrac{\partial}{\partial x}(\alpha x + y) \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial z}(\alpha x + z) = \dfrac{\partial}{\partial y}(\alpha + y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = \alpha \\ 1 = \alpha \\ 1 = 1 \end{cases} \implies \alpha = 1$$

Dunque

$$\omega = (y+z)\,dx + (x+z)\,dy + (x+y)\,dz$$

Il potenziale $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ deve verificare il sistema di 3-eq.

$$\begin{cases} f_x = y+z \\ f_y = x+z \\ f_z = x+y \end{cases}$$

Dalla 1^ eq

$$f(x,y,z) = \int (y+z)\,dx = \underline{\underline{(y+z)x}} + C(y,z)$$

$$f_y = x + C_y(y,z)$$

Metto nella 2^ eq:

$$\cancel{x} + C_y(y,z) = \cancel{x} + z$$

Integro in y:

$$C(y,z) = \int C_y(y,z)\,dy$$

$$= \int z\,dy$$

$$= zy + D(z)$$

Dunque

$$f(x,y,z) = \underline{\underline{(y+z)}}\, x + zy + D(z)$$

Derivo in z!

$$f_z = x + y + D'(z)$$

Terza Eq.:

$$\cancel{x} + \cancel{y} + D'(z) = \cancel{x} + \cancel{y}$$

$$D'(z) = 0$$

$$D = \text{cost.} \quad \square$$