Lezione 4

lunedì 6 marzo 2017 10:39

Criterio Leibniz:

$$\left.\begin{array}{l} i)\ a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \\ ii)\ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ decresc.} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

converge

DIM $\quad S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k \qquad n \in \mathbb{N}$

ORA:

$$S_{2n+1} - S_{2n} = (-1)^{2n+1} \cdot a_{2n+1}$$

$$= -a_{2n+1} \leq 0$$

perché

$a_n \geq 0 \quad \forall n$

Dunque

$$\boxed{S_{2n+1} \leq \underline{\underline{S_{2n}}}}$$

Poi

$$S_{2n+1} = \underline{(-1)^{2n+1}} a_{2n+1} + \underline{\underline{(-1)^{2n}}} a_{2n} + S_{2n-1}$$

$$= \underbrace{-a_{2n+1} + a_{2n}}_{\geq 0} + S_{2n-1}$$

$\forall n$ perché

la succ. decresc.

$$\geq S_{2n-1}$$

Ricopio

$$S_{2n-1} \leq S_{2n+1} \quad \leftarrow$$

Analogamente troverò:

$$S_{2n} \geq S_{2n+2}$$

Riassunto

$$\boxed{S_1 \leq S_3 \leq \ldots \leq S_{2n+1} \leq S_{2n} \leq S_{2n-2} \leq \ldots \leq S_4 \leq S_2}$$

Deduco che

(1) $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ è crescente e sup. limitata

(2) $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ è decresc. e inf. limitata

Dunque esistono finiti:

$$\mathbb{R} \ni L_1 = \lim_{n \to \infty} S_{2n+1}$$

$$\mathbb{R} \ni L_2 = \lim_{n \to \infty} S_{2n}$$

Poi

$$L1 - L2 = \lim_{n \to \infty} S_{2n+1} - \lim_{n \to \infty} S_{2n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} S_{2n+1} - S_{2n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(- \underline{\underline{a_{2n+1}}} \right)$$

$$= 0$$

$$\Longrightarrow \quad L_1 = L_2 := L$$

$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \mathbb{R}$$

Deduciamo che si ha

$$\lim_{n\to\infty} S_n = L \in \mathbb{R} .$$

$\square$

Criterio del Confronto Asintotico

TEOR. Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni reali o complesse.

Supponiamo che esista finito e $\neq 0$ il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = L \in \mathbb{C}\setminus\{0\} .$$

(Dovrà essere $a_n \neq 0$ definitivamente).

Allora la serie $\sum_{n=0} a_n$ converge assolutamente se e solo se converge assolutamente la serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

DIM. Avremo

$$0 \neq |L| = \left| \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} \right|$$

$|\cdot|$ è cont.

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{b_n}{a_n} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{|b_n|}{|a_n|}$$

Dunque esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq \bar{n}$ si ha

$$\frac{|L|}{2} \leq \frac{|b_n|}{|a_n|} \leq 2|L|$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{|L|}{2} \cdot |a_n| \leq |b_n| \leq 2|L| \cdot |a_n|$$

$\forall n \geq \bar{n}$

Concludo che

Confronto

$$\frac{|L|}{2} \sum_{n=\bar{n}}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=\bar{n}}^{\infty} |b_n| \leq 2|L| \sum_{n=\bar{n}}^{\infty} |a_n|$$

$$2 \quad n=\bar{n} \qquad n=\bar{n} \qquad n=n$$

$$\underset{\infty}{\|} \implies \underset{\infty}{\|} \ \underset{\infty}{\wedge} \quad \Longleftarrow \quad \underset{\infty}{\wedge}$$

$\square$

<u>ESEMPIO</u> Consideriamo

$$b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \qquad n \geq 1$$

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right) \qquad n \geq 1$$

ORA

$$\frac{a_n}{b_n} = 1 - \underline{\underline{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1 \neq 0$$

Attenzione però perché il criterio del Confr. Asintotico non si può usare. Infatti

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\underline{\underline{\frac{}{\sqrt{n}}}} \quad - \underline{\underline{\frac{1}{n}}} \right)$$

$= -\infty$ diverge .

ESERCIZI Determinare tutti i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che converga la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3-1}}{n^\alpha}}_{= a_n}$$

Soluzione

$$a_n = \frac{\cancel{n^3}+1 - (\cancel{n^3}-1)}{n^\alpha\left(\sqrt{n^3+1} + \sqrt{n^3-1}\right)}$$

$$= \frac{2}{n^\alpha \cdot n^{3/2}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^3}} + \sqrt{1-\frac{1}{n^3}}\right)}$$

$$= \frac{1 \quad 2}{n^{\alpha+3/2} \cdot \left(\sqrt{1+\frac{1}{n^3}} + \sqrt{1-\frac{1}{n^3}}\right)}$$

Bene. ORA: Confronto $a_n > 0$
con

1

$$b_n = \frac{\quad}{n^{\alpha+3/2}}$$

Il limite del quoziente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^3}}} = 1 \neq 0 .$$

Per il Crit. del Confr. Asint.:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underset{\geq 0}{a_n} < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}+\alpha}} < \infty$$

$$\iff \frac{3}{2}+\alpha > 1$$

$$\iff \alpha > -\frac{1}{2} .$$

$\square$

ESER. 10 Al variare di $x \in \mathbb{R}$ studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{1+n+x^2 n^2} .$$

SOL. Serie a termini positivi.

1° CASO $x=0$ la serie è

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = +\infty$$

INUTILE

Confronto Asint.

1° CASO $x=0$ la serie è

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = +\infty$$

INUTILE

Confronto Asint.

con $\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{1/2}}$

e $\sum \frac{1}{n^{1/2}} = \infty$ poiché $\frac{1}{2} < 1$.

2° CASO $x \neq 0$. $\sqrt{n+1} \leq \sqrt{n+n}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\underbrace{n+1}_{\geq 0} + x^2 n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{n}}{x^2 n^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < \infty$$

Per confronto la serie data converge per $x \neq 0$ $\qquad \alpha = \frac{3}{2} > 1$.

ESERCIZIO 11 Al variare di $x \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{R}$ con $k \neq 0$ studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{|n-x|}{k}}.$$

Sol. Serie a termini positivi.

Prima con il Criterio della Radice:

$$L = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{e^{-\frac{|n-x|}{k}}}$$

$$= \lim_{n \to \infty} e^{-\frac{|n-x|}{k \cdot n}}$$

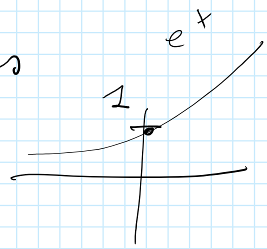
$$= \lim_{n \to \infty} e^{-\frac{1}{k}\left|1 - \frac{x}{n}\right|}$$

Cont. exp

$$= e^{-\frac{1}{k} \lim_{n \to \infty} \left|1 - \frac{x}{n}\right|}$$

$$= e^{-\frac{1}{k}}.$$

① Se $L = e^{-\frac{1}{k}} < 1$ allora la serie converge.



$$e^{-\frac{1}{k}} < 1 \iff -\frac{1}{k} < 0$$

$$\iff \underline{\underline{k > 0}}.$$

② Se $L = e^{-\frac{1}{k}} > 1$ allora la serie $\underline{\underline{\text{diverge a } +\infty}}$.

Avremo

$$e^{-\frac{1}{k}} > 1 \iff \underline{\underline{k < 0}}.$$

Il caso $L = 1$ <u>non</u> si presenta.

Il caso $L=1$ non si presenta.
Quindi abbiamo finito.

$\square$

ESERCIZIO 12 Discutere la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\sqrt[3]{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)}}_{\geq 0} \cdot (-1)^n .$$

SOL

È una serie a segno alterno.
Uso Leibniz:

$$a_n = \sqrt[3]{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)} \geq 0$$

① È infinitesima?

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)} =$$

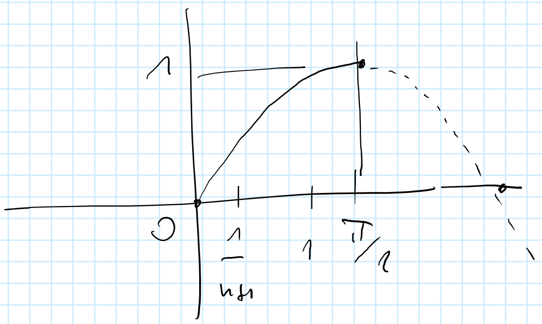
$$= \sqrt[3]{\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{n+1}\right)}$$

$$= \sqrt[3]{\sin\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\right)}$$

$$= 0 .$$ Sì è infinitesima

② $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente?

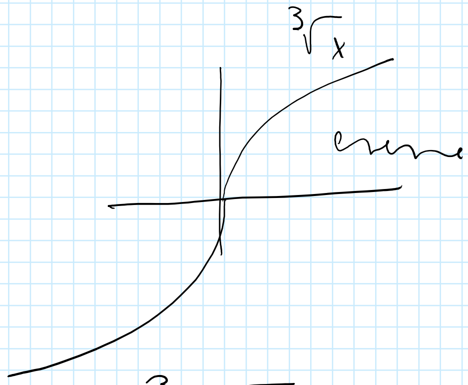
$$a_n = \sqrt[3]{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)} \qquad n \geq 1$$



$0 < \frac{1}{n+1} < \frac{\pi}{2}$

lì sin è crescente

$$n \longmapsto \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\text{decresce}} \longmapsto \underbrace{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)}_{\text{decresce}} \longrightarrow \underbrace{\sqrt[3]{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)}}_{\text{decresce}}$$



Dunque $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ decresce.

Leibniz

$\Longrightarrow$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sqrt[3]{\dots}$ converge.

Tuttavia

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt[3]{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)} = +\infty$$

Lo vedo con un confronto asintotico.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)}}{\sqrt[3]{\dots}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\quad}{\sqrt[3]{\left(\frac{1}{n+1}\right)}} =$$

$$= \sqrt[3]{\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)}{\frac{1}{n+1}}} = 1 \neq 0$$

$$\frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

Serie converg. assolutamente

$$\Longleftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{1/3}} \overset{\swarrow}{=} \infty$$

$\underline{\underline{MA}}$

Quindi serie data diverge.

ESERCIZIO 13 Al variare di $x \in \mathbb{R}$ studiare la convergenza semplice e assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{5^n \log(n+1)} \cdot (x^2 - 2x)^n .$$

Soluz.

1° Step: FARE SUBITO la converge assoluta

2° Step: CA $\Longrightarrow$ CS

3° Step: Studio la CS dove non c'è la CA.