Lezione 5

lunedì 13 marzo 2017 10:28

Serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{5^n \log(n+1)} (x^2-2x)^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Sol

$a_n(x) = \ldots$

ha un segno che può cambiare

Parto con la CA

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(x)| \overset{?}{<} \infty \quad \text{per quali } x \in \mathbb{R}.$$

Provo con il criterio della Radice:

$$\underline{\underline{L(X)}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(x)|}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{4^n \cdot |x^2-2x|^n}{5^n \log(n+1)}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4\ |x^2-2x|}{5 \sqrt[n]{\log(n+1)}}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{}{5 \sqrt[n]{\log(n+1)}}$$

Ma

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\log(n+1)} = 1$$

$$\sqrt[n]{\log 2} \leq \sqrt[n]{\log(n+1)} \leq \sqrt[n]{n}$$

$$\downarrow \qquad \Longrightarrow \qquad \downarrow \qquad \Longleftarrow \qquad \downarrow$$

$$1 \qquad\qquad 1 \qquad\qquad 1$$

$$n \to \infty$$

Concludo che

$$L(x) = \frac{4}{5} |x^2 - 2x|, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Per il CR:

(1) $L(x) < 1 \Rightarrow$ Serie converge assolutamente e quindi anche conv. semplice

(2) $L(x) > 1 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} |a_n(x)| \neq 0$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n(x) \neq 0$$

$$\Downarrow$$

Deduco che NON c'è convergenza assoluta e neppure semplice.

Ci sarebbe il caso $L(x) = 1 \to$ DA FARE A PARTE

Devo studiare la diseq.:

$$L(x) < 1 \iff \frac{4}{5}\,|x^2 - 2x| < 1$$

$$\iff |x^2 - 2x| < \frac{5}{4}$$

$$\iff \begin{cases} x^2 - 2x < \frac{5}{4} \\ x \qquad > -\frac{5}{4} \end{cases}$$

Studio la 1^ diseq.:

$$x^2 - 2x - \frac{5}{4} < 0$$

Le due radici dell'eq. associata

$$x^2 - 2x - \frac{5}{4} = 0$$

Cioè

$$x_\pm = \frac{2 \pm \sqrt{4+5}}{2}$$

$$= \frac{2 \pm 3}{2} = \begin{cases} 5/2 \\ -1/2 \end{cases}$$

Quindi

$$x^2 - 2x - \frac{5}{4} < 0 \iff \boxed{-\frac{1}{2} < x < \frac{5}{2}}.$$

Secondo diseq.:

$$x^2 - 2x + \frac{5}{4} > 0 \qquad \Delta = 4 - 5 = -1 < 0$$

VERIFICATA $\forall x \in \mathbb{R}$.

Conclusione:

$$L(x) < 1 \iff -\frac{1}{2} < x < \frac{5}{2}$$

Qui c'è sia CS che CA.

Poi

$$L(x) > 1 \iff x < -1/2 \text{ oppure } x > \frac{5}{2}$$

Qui non c'è né CS

né CA.

-

Rimane il caso $L(x) = 1$ ovvero

$x = -1/2$ e $x = \frac{5}{2}$

Ad es per $x = -1/2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{4}+1\right)^n}{5^n \log(n+1)} = \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(n+1)}}$$

Conv. semplice (Serie a segno alterno)
Uso cr. Leib.

- $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\log(n+1)} = 0$ OK

- $\frac{1}{\log(n+1)}$ decresce? Sì ok

Quindi per Leib. c'è $\underline{\underline{CS}}$.

Poi la CA:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(n+1)}$$

Confronto:

$$\log(n+1) \leq n \quad \forall n \geq 1$$

$$\frac{1}{} \geq \frac{1}{} \quad \forall n \geq 1$$

$$\frac{1}{\lg(n+1)} \geq \frac{1}{n} \qquad \forall n \geq 1$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lg(n+1)} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

Fatto noto

Per confronto la serie data diverge

Quindi:

$x = -1/2$ — CS sì — CA No

Rimane $x = 5/2 \to$ Esercizio.

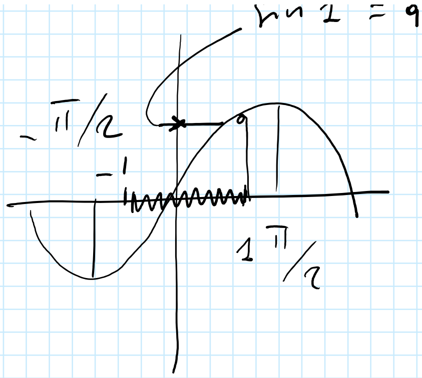
ES 14 Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\sin(\sin(n))\right]^{n}.$$

SOLUZIONE Converge assolutamente;

$\sin 1 = a$

$$|\sin(x)| \le 1$$



Quindi

$$|\sin(\sin(n))| \le \sin(1) = q < 1$$

Quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\sin(\sin(n))|^n \le \sum_{n=1}^{\infty} q^n < \infty.$$

Geom. Converg.

Per confronto la serie data converge ASS $\Rightarrow$ SEMPL.

$\square$

INTEGRALI DI RIEMANN GENERALIZZATI

<u>1° Tipo</u> Integrali di funzioni su intervalli NON limitati.

<u>2° Tipo</u> Integrali di funzioni NON limitate su intervallo limitato.

<u>Notazioni</u>:

$[a, b] \subset \mathbb{R}$ con $-\infty < a < b < \infty$

$f \in \underline{\underline{\mathcal{R}([a,b])}}$ $\quad$ f è una funzione Riemann integrabile nell'intervallo $[a,b]$,

INTEGRALI SU INTERV. NON LIMITATO

DEF Siano $a \in \mathbb{R}$ ed $f \in \mathcal{R}([a,b])$ $\forall b \geq a$.
Diciamo che f è integrabile in senso improprio su $[a,\infty)$ se esiste finito il seguente limite:

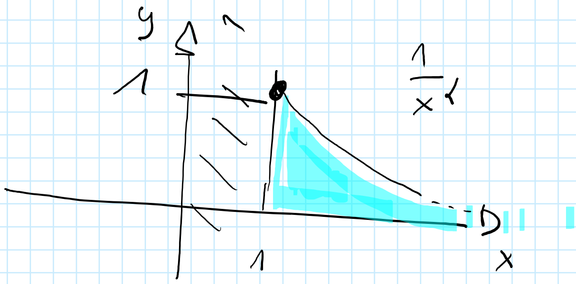
$$I = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\,dx \quad (\in \mathbb{R}).$$

Porremo:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = I.$$

ESEMPIO Studiamo la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$



al variare del parametro $\alpha > 0$

Conti. Sia $b > 1$

$$\int_1^b \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \int_1^b x^{-\alpha}\,dx =$$

$-\alpha+1 \quad x=b$

$$= \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_{x=1}^{x=b}$$

$$= \frac{1}{1-\alpha} \left[b^{-\alpha+1} - 1 \right]$$

$(-\alpha+1>0)$

$$\lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \begin{cases} \infty & \text{se } \alpha<1 \\ \frac{1}{\alpha-1} & \text{se } \alpha>1 \end{cases}$$

$(1-\alpha<0)$

Se poi era $\alpha=1$

$$\int_1^b \frac{1}{x}\, dx = \left[\log x \right]_{x=1}^{x=b}$$

$$= \log b \xrightarrow[b\to\infty]{} \infty$$

Conclusioni

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\, dx < \infty \iff \alpha > 1 .$$

INTEGRALI DI FUNZIONI NON LIMITATE

DEF Sia $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ con $-\infty<a<b<\infty$ una funzione tale che $f\in\mathcal{R}([a+\varepsilon,b])$ per ogni $\varepsilon>0$. Diciamo che f è integrabile in senso improprio su $(a,b]$ se esiste finito il limite

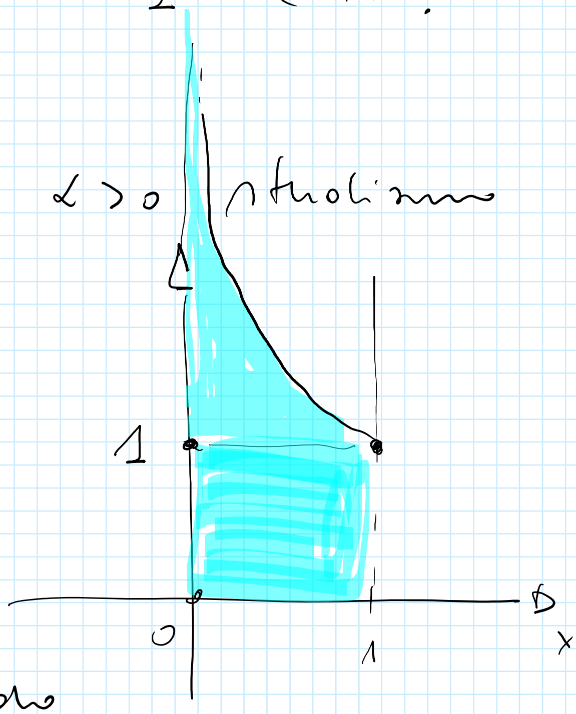
$$I=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx \in\mathbb{R}.$$

In questo caso poniamo

$$\int_a^b f(x)\,dx = I \in\mathbb{R}.$$

ESEMPIO Al variare di $\alpha>0$ studiamo l'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx\,,$$



Procedo nel seguente modo

Cambio di variabile

$$x=\frac{1}{y}\qquad dx=-\frac{1}{y^2}\,dy$$

$$x=1\ \to\ y=1$$

$$x=0^+\ \to\ y=\infty$$

Dunque

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \int_\infty^1 y^\alpha \,(-1)\, \frac{1}{y^2}\,dy$$

$$= \int_1^\infty \frac{1}{y^{2-\alpha}}\,dy$$

$\wedge$ se e solo se

∞ $\quad 2-\alpha > 1$

$\Updownarrow$

$$\boxed{\alpha < 1}$$

Conclusione

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx < \infty \iff \alpha < 1 .$$

$\square$

TEOREMI DEL CONFRONTO

Sia $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione non negativa $f \geq 0$ tale che $f \in \mathcal{R}([a,b]) \ \forall\, b \geq a$.

Allora la funzione

$$I(b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

è crescente e quindi esiste (sempre)

finito oppure $+\infty$ il limite

$$\lim_{b \to \infty} I(b) \quad \text{(esiste)}.$$

TEOR (crit. confronto) siano $f, g \in R([a,b])$ $\forall\, b \geq a$ e supp. che esista $\bar{x} \geq a$ tale che

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall\, x \geq \bar{x}.$$

Allora:

(1) $$\int_a^\infty g(x)\,dx < \infty \implies \int_a^\infty f(x)\,dx < \infty.$$

(2) $$\int_a^\infty f(x)\,dx = \infty \implies \int_a^\infty g(x)\,dx = \infty.$$

TEOR (Crit. del Confr. Asintotico)

Siano $f, g \in R([a,b])$ $\forall\, b \geq a$ due funzioni tali che $g(x) > 0$ $\forall\, x \geq a$.
Supponiamo esista finito e diverso da 0 il seguente limite

$$(0 \neq L =) \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Allora

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \text{ converge} \iff \text{converge} \quad \int^\infty$$

(esiste

$\int_a f(x)\,dx$ converge $\Longleftrightarrow$ converge

(esiste finito) $\quad \int_a^\infty f(x)\,dx < \infty$

ESERCIZIO 1 Dopo aver calcolato l'integrale

$$\int_0^1 \log^2 x \, dx$$

studiare la convergenza dell'integrale

$$\int_0^1 \log\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \cdot \log x \, dx .$$

SOL. Primitiva di $\log^2 x$

$$\int 1 \cdot \log^2 x \, dx = x \log^2 x - \int \cancel{x}\, 2 \log x \, \frac{1}{\cancel{x}} \, dx$$

$$= x \log^2 x - 2 \int 1 \cdot \log x$$

$$= x \log^2 x - 2 \left[x \log x - \underbrace{\int x \frac{1}{x} \, dx}_{x} \right]$$

$$= x \left[\log^2 x - 2 \log x + 2 \right] + C$$

Dunque

$$\int_0^1 \log^2 x \, dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \log^2 x \, dx$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \Big[x \left(\log^2 x - 2 \log x + 2 \right) \Big]^{x=1}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \Big[x(\lg^2 x - 2\lg x + 2) \Big]_{x=\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(2 - \varepsilon(\lg^2 \varepsilon - 2\lg \varepsilon + 2) \right)$$

$$= 2$$

Studio la convergenza del 2° Integrale

$$\int_0^1 \log\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \lg x \, dx =$$

$$= \int_0^1 \lg\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) \lg x \, dx$$

$$= \int_0^1 \boxed{\left(\lg(x^2+1) - 2\lg x\right) \lg x} \, dx \qquad = f(x)$$

Prova a confrontare la funz. integranda con $\boxed{\log^2 x}$, confronto al limite per $x \to 0^+$

$$\parallel$$

$$g(x)$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\left(\log(x^2+1) - 2\lg x\right) \cancel{\lg x}}{\log^{\cancel{2}} x}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{[illegible]}{g(x)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{[illegible]}{\log^2 x}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{\log(x^2+1)}{\log x} - 2 \right)$$

$$= -2 \neq 0$$

Quindi per il Crit. del Confronto Asintotico

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \log\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \log x \,dx \quad \text{Converge}$$

$$\Updownarrow$$

$$\text{Converge} \quad \int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 \log^2 x \,dx = 2$$

CONVERGE

Conclusione:

l'integrale converge