+ ES 2 Calcolare l'integrale

$$I = \int_4^{\infty} \frac{1}{x(\sqrt{x}-1)}\,dx$$

SOLUZIONE

$$I(b) = \int_4^{b} \frac{1}{x(\sqrt{x}-1)}\,dx$$

$b \geq 4$

Sost. $\sqrt{x} = y \iff x = y^2$

$\Downarrow$

$dx = 2y\,dy$

$x = 4 \rightarrow y = 2$

$x = b \rightarrow y = \sqrt{b}$

$$I(b) = \int_2^{\sqrt{b}} \frac{1}{y^2(y-1)}\,2y\,dy$$

$$= 2\int_2^{\sqrt{b}} \frac{1}{y(y-1)}\,dy$$

$$= 2\int_2^{\sqrt{b}} \left(-\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1}\right) dy$$

$$= 2\Big[\log|y-1| - \log|y|\Big]_{y=2}^{y=\sqrt{b}}$$

$$= 2\left[\log\frac{y-1}{y}\right]_{y=2}^{y=\sqrt{b}}$$

$$= 2\left(\log\frac{\sqrt{b}-1}{\sqrt{b}} + \log 2\right)$$

Dunque

$$I = \lim_{b\to\infty} I(b)$$

$$= \lim_{b\to\infty} 2\left(\underline{\log\left(1-\frac{1}{\sqrt{b}}\right)} + \log 2\right)$$

$$= \log 4 .$$

$\square$

<u>ES 3</u> Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri

l'integrale improprio

$$I_\alpha = \int_1^\infty \underbrace{\frac{x^\alpha}{1+\frac{1}{x}} \cdot \log\left(1+\frac{1}{x}\right)}_{f(x)} dx .$$

1) Determinare tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che l'integrale converga

2) Calcolare I_α per $\alpha = -2$.

SOL 1) Voglio usare il Criterio del Confronto Asintotico.

Provo a confrontare con una funzione del tipo

$$\frac{1}{x^\beta} = g(x)$$

con $\beta \in \mathbb{R}$ opportuno tale che

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0 \text{ finito}$$

Conti:

$$\boxed{\log(1+t) = t + o(t) \quad t \to 0}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^\beta}} \frac{x^\alpha}{1+\frac{1}{x}} \log\left(1+\frac{1}{x}\right) = \qquad t = \frac{1}{x}$$

$$= \left| \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\beta+\alpha}}{1+\frac{1}{x}} \frac{1}{x} \frac{(1+o(1))}{} \right| \quad x \to \infty$$

$$= \lim_{x\to\infty} x^{\beta+\alpha-1} \quad \text{con la scelta}$$

$$\beta+\alpha-1 = 0$$

$$= 1 \neq 0 \longleftarrow \quad \text{ovvero} \quad \beta = 1-\alpha$$

Dunque confronto $f(x)$ con

$$f(x) = \frac{1}{x^{1-\alpha}}$$

$$\int_1^\infty f(x)\,dx < \infty \iff \int_1^\infty \frac{1}{x^{1-\alpha}}\,dx < \infty$$

$$\iff 1-\alpha > 1$$

$$\iff \boxed{\alpha < 0}.$$

2) Calcolare quando $\alpha = -2$

$$I_{-2} = \int_1^\infty \frac{1}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)} \log\left(1+\frac{1}{x}\right) dx$$

Sosth $\frac{1}{x} = y \iff x = \frac{1}{y}$

$$\Downarrow$$

$$dx = -\frac{1}{y^2}\,dy$$

$$x = 1 \to y = 1$$

$$x = \infty \to y = 0^+$$

$$I_\alpha = \int_1^0 \frac{y^2}{1+y} \log(1+y) \left(-\frac{1}{y^2}\right) dy$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+y} \underbrace{\log(1+y)}_{= z} dy \quad |||$$

$$= \left[\frac{\left(\log(1+y)\right)^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1}$$

$$= \frac{1}{2} (\log 2)^2. \quad \square$$

ES 4 Studiare la convergenza del seguente integrale improprio

$$I = \int^{\pi} \sqrt{\sin x} \cdot \log\left(\frac{\pi + x}{2\pi}\right) \quad dx$$

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\sqrt{\sin x} \cdot \log\left(\frac{\pi + x}{2\pi}\right)}{(\pi - x)^2}\, dx$$

Soluzione Cambio variabile

$$y = \pi - x \iff x = \pi - y$$

$$dx = -dy$$

$x = 0 \longrightarrow y = \pi$

$x = \pi \longrightarrow y = 0$

$$\pi + x = \pi + \pi - y = 2\pi - y$$

$$I = -\int_{\pi}^{0} \frac{\sqrt{\sin(\pi - y)} \cdot \log\left(1 - \frac{y}{2\pi}\right)}{y^2}\, dy$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{1}{y^2} \sqrt{\sin(\pi - y)}\, \log\left(1 - \frac{y}{2\pi}\right) dy$$

Conti:

$$\sin(\pi - y) = \underbrace{\underbrace{\sin \pi}_{=0} \cos(-y)}_{=0} + \sin(-y) \underbrace{\cos(\pi)}_{=-1}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \sin\beta \cos\alpha$$

$\alpha = \pi$

$\beta = -y$

$$\sin(\pi - y) = \sin y$$

$$\longrightarrow \quad I = \int_0^{\pi} \frac{1}{y^2} \underbrace{\sqrt{\sin y}\, \log\left(1 - \frac{y}{2\pi}\right)}_{\substack{\| \\ f(y)}} dy$$

Uso il Criterio del Confr. Asintotico applicato quando $y \to 0^+$

Sviluppi infinit. per $y \to 0^+$

$$\sin(y) = y + o(y) \qquad y \to 0^+$$

$$\sqrt{\sin(y)} = \sqrt{y + o(y)} = \sqrt{y\,(1 + \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{o(1)})} \quad y \to 0$$

$$= \sqrt{y} \cdot \sqrt{1 + o(1)}$$

$$= \sqrt{y}\,(1 + o(1))$$

Poi

$$\log\left(1 - \frac{y}{2\pi}\right) \underset{y \to 0}{=} -\frac{y}{2\pi} + o\left(-\frac{y}{2\pi}\right)$$

$$= -\frac{y}{2\pi} + o(y)$$

$$= y\left(-\frac{1}{2\pi} + o(1)\right)$$

Dunque la funz. integranda ha questo andamento per $y \to 0^+$

$$f(y) = \frac{1}{y^2}\, y^{1/2} (1 + o(1))\, y \left(-\frac{1}{2\pi} + o(1) \right)$$

$$= \frac{1}{y^{1/2}} \left(-\frac{1}{2\pi} + o(1) \right)$$

Confronto con $g(y) = \frac{1}{y^{1/2}}$

$$\lim_{\boxed{y \to 0^+}} \frac{f(y)}{g(y)} = -\frac{1}{2\pi} \neq 0$$

Per il crit. del confr. Asintotico

$\int_0^{\pi} f(y)\, dy$ converge se e solo se converge

$\int_0^{\pi} \frac{1}{y^{1/2}}\, dy$ Sì CONVERGE perché $1/2 < 1$ $\square$

CONFRONTO FRA SERIE E INTEGRALI

Sia $f : [1, \infty) \to [0, \infty)$ una funzione decrescente. Definiamo la successione numerica

$$a_n = f(n) \qquad n \in \mathbb{N}$$

$a_n = f(n) \qquad n \in \mathbb{N}$

Voglio confrontare

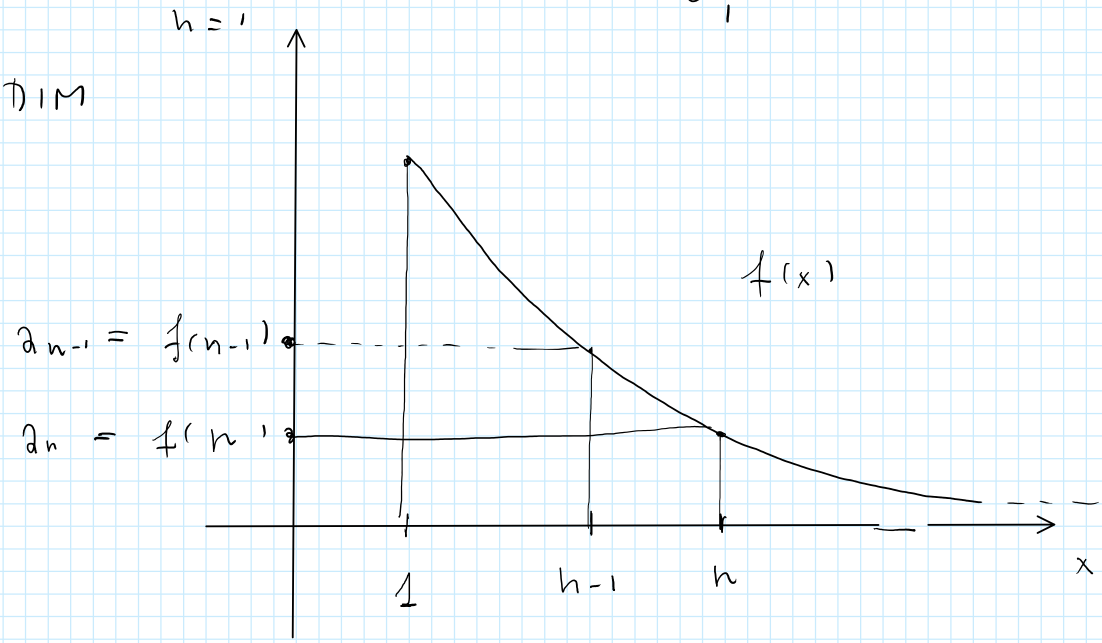
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{con} \quad \int_1^{\infty} f(x)\,dx .$$

TEOR (Criterio del confronto integrale)

Nelle ipotesi precedenti si ha:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \iff \int_1^{\infty} f(x)\,dx < \infty .$$

DIM



Se $n-1 \leq x \leq n$ allora

$$a_{n-1} = f(n-1) \boxed{\geq} f(x) \geq f(n) = a_n$$

Dunque

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n = \sum_{n=2}^{\infty} f(n) \cdot \int_{n-1}^{n} 1\,dx$$

$$= \qquad\qquad .$$

$$= \sum_{n=2} \int_{n-1} f(n)\, dx$$

$$\leq \sum_{n=2}^{\infty} \int_{n-1}^{n} f(x)\, dx =$$

$$= \int_{1}^{\infty} f(x)\, dx$$

Deduciamo che

$$\int_{1}^{\infty} f(x)\, dx < \infty \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} a_n < \infty$$

Poi in modo analogo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=2}^{\infty} f(n-1) \geq \sum_{n=2}^{\infty} \int_{n-1}^{n} f(x)\, dx$$

$$= \int_{1}^{\infty} f(x)\, dx$$

Deduciamo che

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \Rightarrow \int_{1}^{\infty} f(x)\, dx < \infty$$

D

ESEMPIO 1 La serie armonica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} < \infty \iff \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\, dx < \infty$$

Converge Converge

$$\iff \quad \alpha > 1$$

$f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$, è decrescente.

ESERCIZIO Al variare di $\alpha > 0$ discutere la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (\log n)^\alpha}.$$

Osservo che

$$f(x) = \frac{1}{x\,(\lg x)^\alpha} \qquad x > 1 \quad (\alpha > 0)$$

è decrescente

Posso usare il confronto integrale

Studio

$$\int_2^\infty \frac{1}{x\,(\lg x)^\alpha}\,dx =$$

$$= \lim_{b \to \infty} \int_2^b \frac{1}{x} (\lg x)^{-\alpha}\,dx$$

$\alpha \neq 1$

$$= \lim_{b \to \infty} \left[\frac{(\lg x)^{-\alpha+1}}{\ldots} \right]_{x=2}^{x=b}$$

$$= \lim_{b \to \infty} \Big[\frac{(\ \cdot\ )}{-\alpha+1} \Big]_{x=2}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \frac{1}{1-\alpha} \left[(\lg b)^{-\alpha+1} - (\lg 2)^{-\alpha+1} \right]$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(\lg 2)^{1-\alpha}}{\alpha-1} \quad \text{finito} & -\alpha+1<0 \\[2ex] +\infty & -\alpha+1>0 \end{cases}$$

$\alpha = 1$

Conclusione:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{x\,(\lg n)^{\alpha}} < \infty \iff \alpha > 1 .$$

CRITERIO DELLA CONV. ASSOLUTA

DEF Diciamo che l'int. improprio

$$\int_2^{\infty} f(x)\, dx$$

converge in senso assoluto se converge l'integrale

$$\int_2^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty .$$

TEOR Sia $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $f \in \mathcal{R}([a,b]) \ \forall\, b \geq a$.
Se f è assolutamente integrabile in $[a, \infty)$ allora converge anche l'integrale semplice e inoltre

$$\left| \int_a^\infty f(x)\, dx \right| \leq \int_a^\infty |f(x)|\, dx .$$