Lezione 7

mercoledì 15 marzo 2017 10:32

TUTOR 1 RICCARDO CICCONE

Giovedì 16/3 LUF2

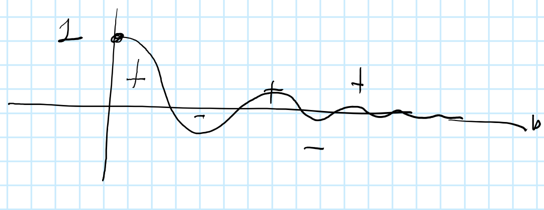
15 - 16.30 Recupero A1

16:30 - 18 Tutorato di A2
preparazione allo scritto.

ESEMPIO L'integrale improprio

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

NON converge assolutamente.

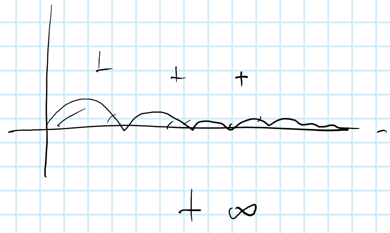


Conti

Intervallo

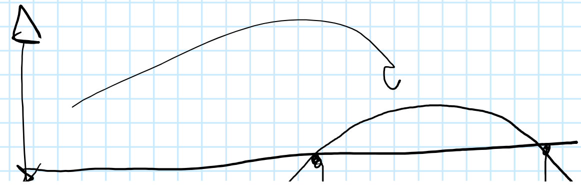
$$\left[k\pi + \frac{\pi}{4},\ k\pi + \frac{3}{4}\pi\right]$$

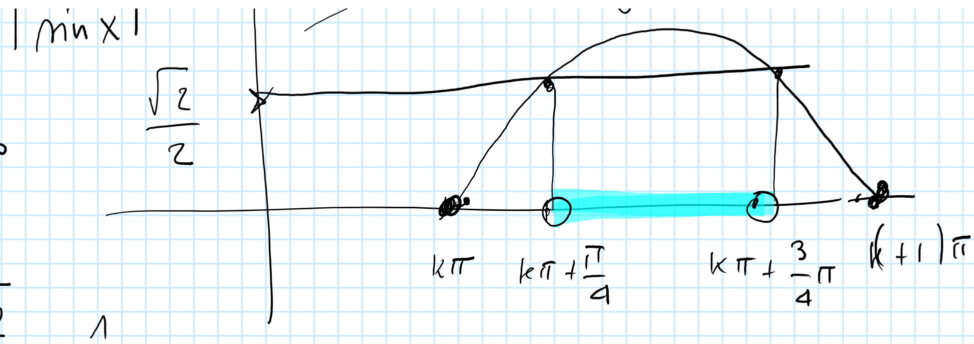
$k = 0, 1, 2, \ldots$



$+\infty$

$|\sin x|$





Su questo intervallo avremo

$$\frac{|\sin x|}{x} \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{x}$$

$$x \leq k\pi + \frac{3}{4}\pi$$

$$\geq \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\pi\left(k + \frac{3}{4}\right)}$$

ORA!

$$\int_0^{\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \int_0^{\infty} \frac{|\sin x|}{x}\, dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\, dx$$

$$\geq \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k\pi+\pi/4}^{k\pi+\frac{3}{4}\pi} \frac{|\sin x|}{x}\, dx$$

$$\geq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{\pi}\,(k+3/4)} \; \frac{\cancel{\pi}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+3/4} = \infty$$

Per confronto Asintotico la serie diverge

dunque
$$\int_0^{\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = +\infty$$

INTEGRALI OSCILLANTI

Vogliamo studiare la convergenza di integrali del tipo
$$\int_0^{\infty} \underset{\substack{\vee\!/ \\ 0}}{f(x)} \sin(x)\, dx$$
$$\int_0^{\infty} \underset{\substack{\vee\!/ \\ 0}}{f(x)} \cos(x)\, dx$$
oppure
$$\int_0^{\infty} \underset{\substack{\vee\!/ \\ 0}}{f(x)}\, e^{ix}\, dx .$$

TEOR. (Criterio di Abel)

Siano $f \in C([a,\infty))$ e $g \in C^1([a,\infty))$ che verifichino le seguenti ipotesi:

i) $f = F'$ dove $F \in C^1([a,\infty))$ è LIMITATA.

ii) $g' \leq 0$ e $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$.

Allora l'integrale improprio

$$\int_a^\infty f(x)\, g(x)\, dx$$

converge.

DIM. Per $b > a$ faccio una integr. per parti:

$$\underbrace{\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx} = \Big[F(x)\, g(x)\Big]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b F(x)\, g'(x)\, dx.$$

$$= \underbrace{F(b)\, g(b)}_{\substack{\downarrow\, b\to\infty \\ 0}} - \underbrace{F(a)\, g(a)}_{\text{costante}} - \underbrace{\int_a^b F(x)\, g'(x)\, dx}_{\text{devo studiare questo integrale}}$$

Affermo che l'ultimo integrale converge assolutamente anche con $b = \infty$.

Precisamente: $|F(x)| \leq M < \infty \quad \forall x$

$$\int_a^\infty |F(x)|\,|g'(x)|\, dx \leq$$

$$\leq M \cdot \int_a^\infty |g'(x)|\, dx =$$

$$= -M \int_a^\infty g'(x)\,dx$$

$$= -M \lim_{b\to\infty} \int_a^b g'(x)\,dx$$

$$= -M \lim_{b\to\infty} \left(g(b) - g(a) \right)$$

$$= M \cdot g(a) \in \mathbb{R}$$

Questo dimostra che

$$\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$$ ESISTE FINITO $\square$

ES Per ogni $\alpha > 0$ il seguente integrale oscillante converge:

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$$

VERO. Perché $f(x) = \sin x$ ha primitiva limitata

e $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ è $\downarrow 0$ per $x\to\infty$ $\forall \alpha > 0$. $\square$

Funzione Γ di Eulero

Definiamo la funzione $\Gamma : (0,\infty) \to (0,\infty)$

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \, dt, \quad x > 0,$$

È la funzione Γ di Eulero.

L'integrale improprio converge:

In fatti

$$\int_0^1 t^{x-1} e^{-t} \, dt$$

$$CA \qquad t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$$

$$e^{-t} \xrightarrow[t \to 0^+]{} 1$$

Ma $\int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}} dx < \infty$

perché $\underline{\underline{x > 0}}$.

Poi $$\int_1^\infty t^{x-1} e^{-t} \, dt$$

Confronto Asintotico $\quad g(t)$

$$\lim_{t \to \infty} \frac{t^{x-1} e^{-t}}{e^{-t/2}} =$$

" $f(t)$

$\forall x >$

$$= \lim_{t \to \infty} \frac{t^{x-1}}{e^{t/2}} = 0$$

Dunque definitivamente

$$t^{x-1} e^{-t} \leq e^{-t/2} \quad \forall t \geq \bar{t}$$

MA allora

$$\int_{\bar{t}}^{\infty} t^{x-1} e^{-t} \, dt \leq \int_{\bar{t}}^{\infty} e^{-t/2} \, dt$$

$$= \left[\frac{e^{-t/2}}{-1/2} \right]_{t=\bar{t}}^{t=\infty} < \infty$$

Osservazioni Finali

- $$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} t^x e^{-t} \, dt$$

$$= \left[- t^x e^{-t} \right]_{t=0}^{t=\infty} + \int_0^{\infty} e^{-t} x \, t^{x-1} \, dt$$

$$= 0 + x \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} \, dt$$

$$= x\,\Gamma(x)$$

- $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = 1$

Conclusione $x = n \in \mathbb{N}$:

$$\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n) = n\cdot(n-1)\cdot\Gamma(n-1)$$

$$= \dots = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$$

$$= n! \qquad \square$$

<u>ES 5</u> Verificare che $f(x) = (\sin x \log x)/x^2$ ha integrale improprio assolut. convergente su $[1,\infty)$.

SOL. Devo provare che

$$\int_1^\infty \left| \frac{\sin x \cdot \log x}{x^2} \right| dx < \infty$$

$$\wedge\!\!\!\!/\!/ \quad \text{Confronto } |\sin x| \le 1$$

$$\int_1^\infty \frac{\log x}{x^2}\,dx$$

ora

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\lg x}{\sqrt{x}} = 0$$

$\Downarrow$ definitivamente

$$\frac{\lg x}{\sqrt{x}} \leq 1 \qquad \forall x \geq \bar{x}$$

$\Updownarrow$

$$\lg x \leq \sqrt{x} \qquad \forall x \geq \bar{x}$$

Dunque

$$\int_{\bar{x}}^{\infty} \frac{\lg x}{x^2}\,dx \leq \int_{\bar{x}}^{\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\,dx < \infty$$

$\underline{\underline{\frac{3}{2} > 1}}$

Per confronto l'integrale dato converge assolutamente.

<u>ES 6</u> Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ studiare la convergenza del seguente integrale generalizzato:

$$I_\alpha = \int_0^{\infty} \frac{x \,\operatorname{arctg}(x^\alpha)}{\sinh(x^2)}\,dx$$

Sol. Considero prima l'integrale su $[1, \infty)$

$$\int_1^\infty \frac{x \operatorname{arctg}(x^\alpha)}{\sinh(x^2)} \, dx \overset{?}{<} \infty$$

per quali $\alpha \in \mathbb{R}$

Dunque

$$\sinh(x^2) = \frac{e^{x^2} - e^{-x^2}}{2}$$

Chiaramente

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sinh(x^2)}{x^p} = +\infty \quad \forall p > 0$$

$$\Downarrow$$

$$\sinh(x^2) \geq x^p \quad \forall x \geq \exists \bar{x}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{\sinh(x^2)} \leq \frac{1}{x^p} \quad \forall x \geq \bar{x}$$

Criterio del confronto

$$0 \leq \int_{\bar{x}}^\infty \frac{x \operatorname{arctg}(x^\alpha)}{\sinh(x^2)} \, dx \leq \int_{\bar{x}}^\infty \frac{\pi}{2} \frac{x}{x^p} \, dx$$

≥ 0

∞

1

$$= \frac{\pi}{2} \int_{\bar{x}}^{\infty} \frac{1}{x^{p-1}}\, dx < \infty \iff p > 2$$

$p = 3$

Per confronto l'int. su $[1,\infty)$ converge.

Passo all' $[0,1]$:

$$\int_0^1 \frac{x \operatorname{arctg}(x^\alpha)}{\sinh(x^2)}\, dx$$

Procediamo con un confr. asintotico

$$\sinh(t) = t + o(t) \qquad t \to 0$$

$$\sinh(x^2) = x^2 + o(x^2) \qquad x \to 0$$

$$= x^2(1 + o(1))$$

1° caso se $\alpha \leq 0$

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{arctg}(x^\alpha) = \begin{cases} \pi/4 & \neq 0 \\ \pi/2 & \alpha < 0 \end{cases}$$

Quindi la funzione integranda è del tipo

$$f(x) = \boxed{\frac{1}{x}} \cdot (\underset{\neq 0}{\text{cost.}} + o(1))$$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Quindi per il Crit. del C A

l'integrale

$$\int_0^1 \frac{x \arctg x^\alpha}{\sinh x^2}\, dx = \infty$$

diverge.

2° CASO $\alpha > 0$: $x^\alpha \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$

Usiamo

$$\arctg t \underset{t \to 0}{=} t + o(t) = t\,(1 + o(1))$$

$$\Downarrow$$

$$\arctg x^\alpha \underset{x \to 0^+}{=} x^\alpha\,(1 + o(1))$$

Riassumendo

$$f(x) = \frac{x \arctg x^\alpha}{\sinh x^2}$$

$$= x\,\frac{x^\alpha\,(1 + o(1))}{x^2\,(1 + o(1))}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{x^{1-\alpha}}}_{= g(x)} \cdot (1+o(1))$$

Siccome $\int_0^1 \frac{1}{x^{1-\alpha}}\,dx < \infty$ perché $1-\alpha < 1 \Leftrightarrow$ CASO 2 $\boxed{\alpha > 0}$

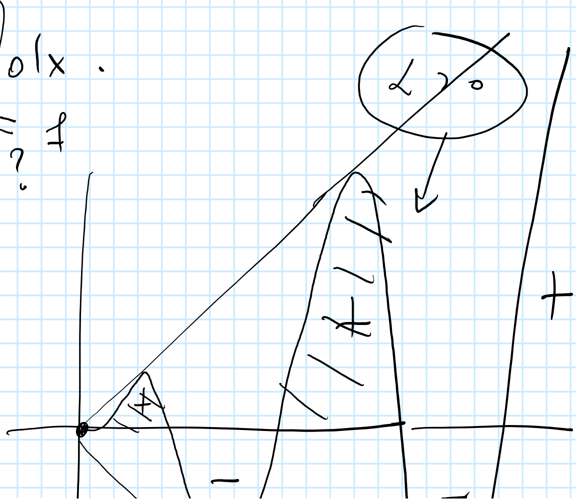
Allora per il CCA l'integrale dato converge.

CONCLUSIONE

Int. Conv. $\Leftrightarrow$ $\underline{\alpha > 0}$.

ES 7 Per $\alpha \in \mathbb{R}$ studiare la convergenza semplice (ed assoluta) dell'integrale improprio

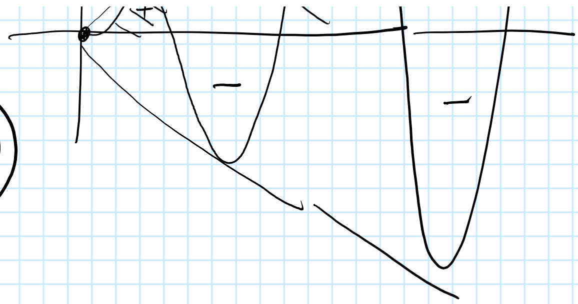
$$\int_1^\infty x \underbrace{\boxed{\sin(x^\alpha)}}_{\overset{?}{=} f}\,dx .$$



Vorrei applicare il criterio di Abel.

Parto con la sostituzione

Parto con la sostituzione



$x^{\alpha} = y$ $\qquad$ $\alpha > 0$

$x = y^{\frac{1}{\alpha}}$

$dx = \frac{1}{\alpha} y^{\frac{1}{\alpha} - 1} dy$

$x = 1 \to y = 1$

$x = \infty \xrightarrow{\alpha > 0} y = \infty$

L'integrale diventa:

$$\frac{1}{\alpha} \int_1^{\infty} y^{\frac{1}{\alpha}} \sin y \; y^{\frac{1}{\alpha} - 1} dy =$$

$$= \frac{1}{\alpha} \int_1^{\infty} \frac{\sin y}{y^{1-2/\alpha}} dy$$

Ora $f(y) = \sin y$ ha primitiva limitata

Poi

$g(y) = \frac{1}{y^{1-2/\alpha}}$ è $\downarrow 0$ $\quad y \to \infty$

Ho scoperto che $\qquad$ di certo quando

$\alpha > 2 \Rightarrow$ integrale converge

$$1 - \frac{2}{\alpha} > 0$$

$$\Updownarrow$$

$$1 > \frac{2}{\alpha}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\alpha > 2}$$

$\square$