CURVE IN $\mathbb{R}^n$

$n \in \mathbb{N}$ $\quad n = 2, 3 \dots$

$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ fattori}}$

$x \in \mathbb{R}^n$ $\quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ $\quad x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ le coordinate di x

Fissiamo un intervallo

$[0, L] \subset \mathbb{R}$ $\quad L > 0$ lunghezza

DEF Una curva in $\mathbb{R}^n$ è una funzione continua
$\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^n$.
Se poi $\gamma(0) = \gamma(L)$ diremo che la curva è chiusa.
Se poi $\gamma(s) \neq \gamma(t)$ se $s \neq t$ diremo che la curva è semplice.

COMMENTO Dire che γ è continua significa che le coordinate di $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ sono funzioni continue.

DEF L'insieme

$$\operatorname{spt}(\gamma) = \operatorname{supp}(\gamma) = \{ \gamma(t) \in \mathbb{R}^n : t \in [0, L] \}$$

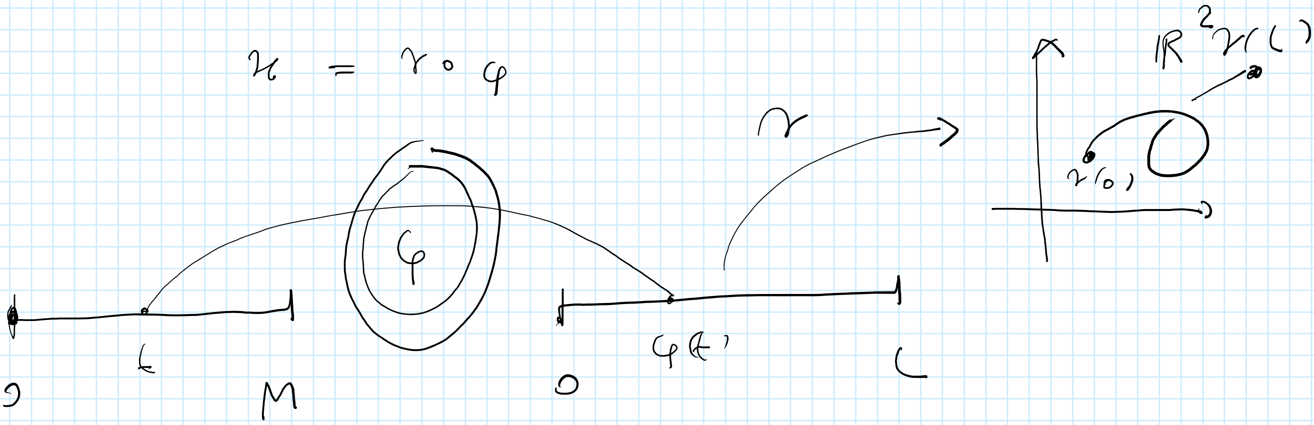
si dice supporto o sostegno della curva.

COMMENTO Sia $\varphi : [0,M] \longrightarrow [0,L]$ una funzione continua iniettiva e suriettiva. Chiameremo φ un "cambiamento di parametro".

Data $\gamma : [0,L] \to \mathbb{R}^n$ curva continua, chiameremo $\kappa : [0,M] \to \mathbb{R}^n$ così definita

$$\kappa(t) = \gamma(\varphi(t)) \qquad t \in [0,M]$$

$$\kappa = \gamma \circ \varphi$$



la chiameremo una riparametrizzazione di γ.

Chiaramente

$$spt(\kappa) = spt(\gamma)$$

ESEMPI

① Curve piane in forma cartesiana: sono del tipo:

$$\gamma(x) = (x, f(x)) \quad \text{con} \quad x \in [a,b] \subset \mathbb{R}$$

$$\text{ed} \quad f \in C([a,b])$$

e $spt(\gamma)$ = grafico di f.

(2) Curve piane in coordinate polari.

Dati $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$, $\theta \in [\alpha, \beta]$ un angolo.

e una funzione $\rho : [\alpha, \beta] \to [0, \infty)$ continua

La curva $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$ definita come segue

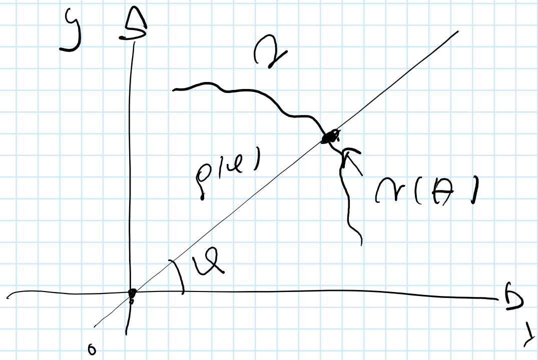
$$\gamma(\theta) = (\rho(\theta)\cos\theta, \rho(\theta)\sin\theta) \in \mathbb{R}^2$$

si dice data in coordinate polari e l'equazione

$$\rho = \rho(\theta)$$

si dice equazione polare della curva.

Ricordare: $\rho \geq 0$.



Consideriamo ora una curva $\gamma \in C^1([0, L]; \mathbb{R}^n)$ ovvero le coordinate $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in C^1([0, L])$.

DEF Il vettore derivata all'istante $t \in [0, L]$ della curva γ è

$$\dot{\gamma}(t) = (\dot{\gamma}_1(t), \dots, \dot{\gamma}_n(t)) \leftarrow$$

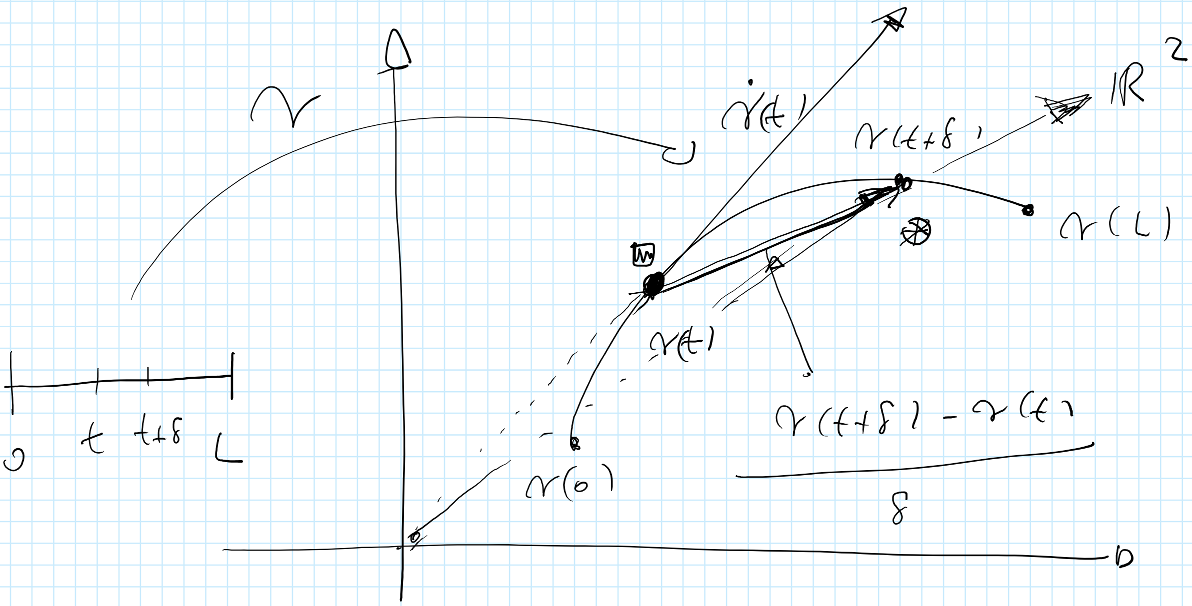
$$= \lim_{\delta \to 0} \frac{\gamma(t+\delta) - \gamma(t)}{\delta}$$

e si chiama velocità di γ al tempo t.

Poi la quantità scalare:

$$|\dot{\gamma}(t)| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \dot{\gamma}_i(t)^2}$$

è la velocità tangenziale della curva.



DEF Diciamo che una curva $\gamma \in C^1([0,L];\mathbb{R}^n)$ è regolare se $|\dot{\gamma}(t)| \neq 0 \quad \forall t \in [0,L]$.

In questo caso è possibile definire il campo tangente unitario alla curva:

$$T(t) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|}, \quad t \in [0,L].$$

ESEMPI

① Sia $\gamma(t) = (t^3, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$.

Derivata:

$$\dot{\gamma}(t) = (3t^2, 2t) \qquad t \in \mathbb{R}$$

Studio la regolarità:

$$|\dot{\gamma}(t)| = (9t^4 + 4t^2)^{1/2} = 0$$

$$\Updownarrow$$

Dunque la curva non è regolare nel punto $t = 0$. $\quad t = 0$

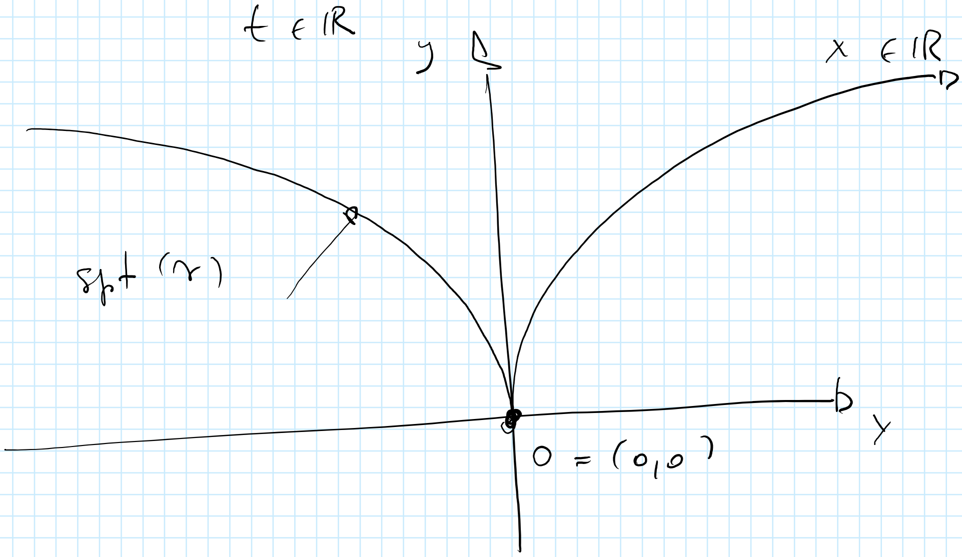
Per disegnare il sostegno basta fare così:

$$t^3 = x \implies t = \sqrt[3]{x}$$

e quindi

$$(t^3, t^2) \rightsquigarrow (x, \underbrace{x^{2/3}}_{f(x)})$$

$t \in \mathbb{R} \qquad\qquad x \in \mathbb{R}$



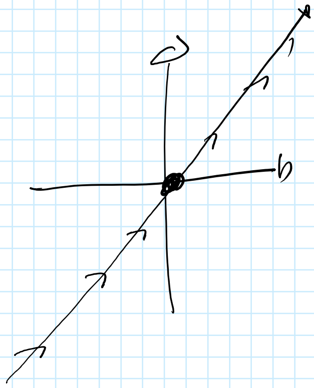
(2) La curva $\gamma(t) = (t^3, t^3)$ $\quad t \in \mathbb{R}$

il sostegno è la bisettrice del 1°-3° quadr.

Dimostr.

$$\gamma'(t) = (3t^2, 3t^2)$$

$$|\gamma'(t)| = 0 \iff t = 0$$



(3) Elica in $\mathbb{R}^3$

cilindrica

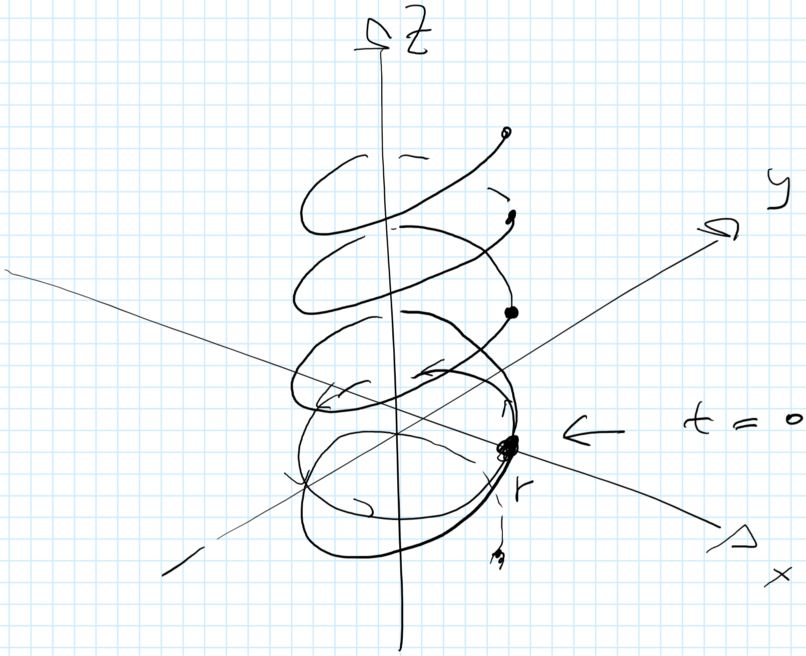
Fissiamo $r > 0$ raggio

$v \in \mathbb{R}$ velocità

Definiamo $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$$\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t, v \cdot t).$$

$t \in \mathbb{R}$



(4) Spirale. Fissiamo un parametro $\alpha > 0$

e consideriamo la curva piana

$r : [0, 2/\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$r(t) = \begin{cases} \left(t^\alpha \cos\left(\frac{1}{t}\right), t^\alpha \sin\left(\frac{1}{t}\right)\right) & t \in (0, 2/\pi] \\ (0, 0) & t = 0 \end{cases}$$

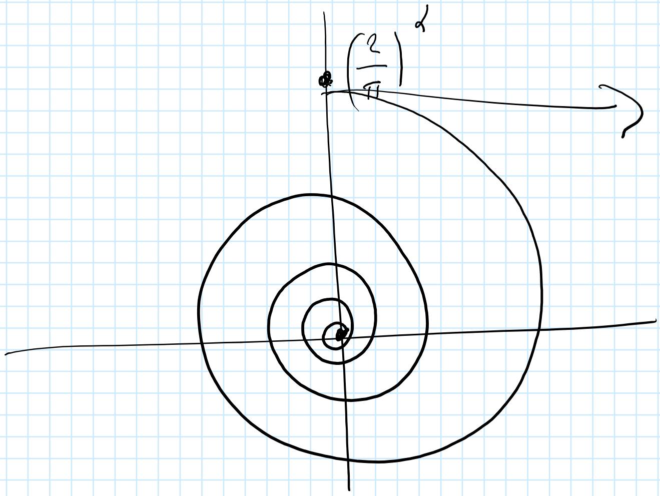
È una curva cont. In particolare

$$\lim_{t \to 0^+} r(t) = (0, 0) = r(0).$$

Voglio disegnare il supporto.

Approx misi fatto così:

parto da $t = \frac{2}{\pi}$

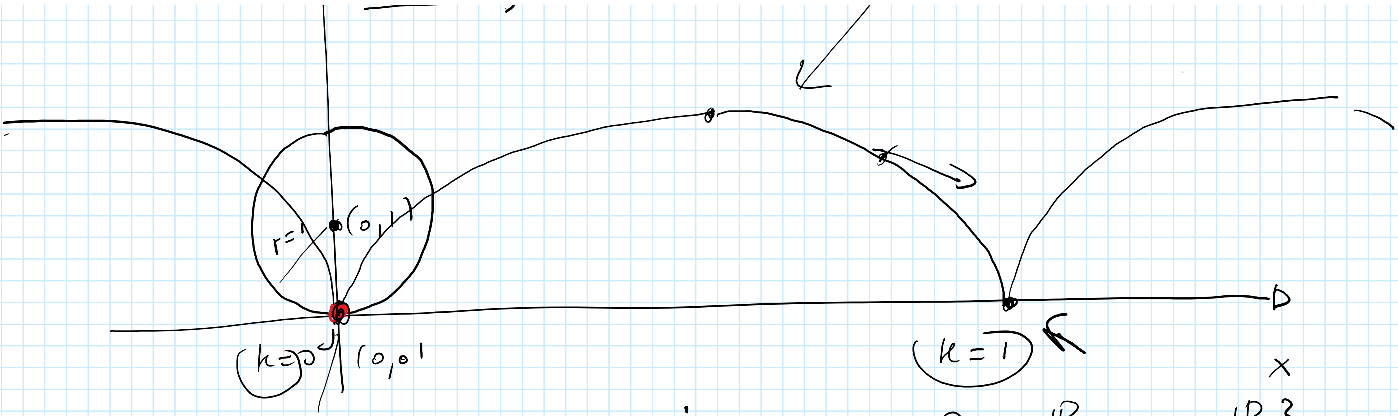


supp r

(5) Cicloide:

y $\vec{v} = 1$

Cicloide



Ricavo le equazioni per $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = (t, 1) - (\sin t, \cos t)$$

$$= (t - \sin t \,,\, 1 - \cos t)$$

$t - \sin t \geq 0$ se $t \geq 0$; $1 - \cos t \geq 0$ sempre

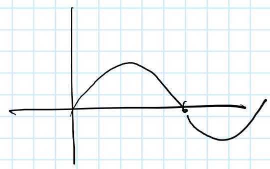
Derivata della curva

$$\dot{\gamma}(t) = (1 - \cos t \,,\, + \sin t)$$

Studio la regolarità della curva:

$$|\dot{\gamma}(t)| = \left((1 - \cos t)^2 + \sin^2 t \right)^{1/2}$$

$$\iff \begin{cases} 1 - \cos t = 0 & t = 2k\pi \\ \sin t = 0 & t = k\pi \end{cases}$$



$$\iff t = 2k\pi$$

$k \in \mathbb{Z}$

$k \in \mathbb{Z}$